UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2011/2012**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques Développement : Polynômes Orthogonaux

Préliminaires.
On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et une fonction poids $w : I \to \mathbb{R}_+^*$. On désigne par $\mathcal{H} = L^2(I, w(x)dx)$, (pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)dx.$$

On suppose le poids w tel que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n w(x)dx < +\infty$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Justifier que $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{H}$.
3. En appliquant l'othonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note γ_n ce coefficient.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que $\langle P_n, P\rangle = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n est un polynôme scindé à racines simples dont les racines sont contenu dans I. (Sinon on pourra trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ non-nul tel que $QP_n \geq 0$ sur I).

Entrelacement des zéros.

1. Démontrer l'existence de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = (a_nX + b_n)P_{n+1} + c_nP_n$. On pourra écrire la division euclidienne de P_{n+2} par P_{n+1}, et justifier que le reste est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Exprimer a_n et c_n à l'aide des γ_i.
2. En déduire la relation de Darboux-Christofell : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
$$(x - y)\sum_{i=0}^{n} P_i(x)P_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)]$$
3. Justifier alors que $P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et qu'entre deux racines successives de P_{n+1} il y a exactement une racine de P_n.

Application : Méthode de Gauss pour l'intégration numérique.
On considère ici pour l'intervalle I un segment $[a, b]$. Pour tout $n \geq 1$, on note $x_1 < \cdots < x_n$ les racines de P_n. On a donc $P_n = \gamma_n(X - x_1)\cdots(X - x_n)$.

1. On note $(L_j), 1 \leq j \leq n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange relatifs aux (x_i), $1 \leq i \leq n$, et on note $\lambda_j = \int_I L_j w dx$. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a
$$\int_I Q(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q(x_i). \tag{1}$$

2. Montrer que (1) est vraie pour tout $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
3. En utilsant les polynômes L_j montrer que $\lambda_j > 0$.
4. Montrer que le choix des x_i et des λ_i est le seul qui rende exacte la formule du (1). pour les polynômes de degrée $2n-1$.

Exemples.

1. *Polynômes de Legendre :* $\mathcal{L}_n = c_n \dfrac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$
   $I = [-1, 1]$, $w(x) = 1$.
2. *Polynômes de Tchebycheff (1ère espèce) :* $\mathcal{T}_n = c_n \cos(n \text{ arccos } x)$
   $I = [-1, 1]$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. *Polynômes de Tchebycheff (2ème espèce) :* $U_n = c_n \dfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}$
   $I = [-1, 1]$, $w(x) = \sqrt{1-x^2}$.
4. *Polynômes de Laguerre :* $L_n = c_n e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n)$
   $I = [0, +\infty[$, $w(x) = e^{-x}$.
5. *Polynômes de Hermite :* $U_n = c_n (-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2})$
   $I = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2/2}$.

References. :

Chambert-Loir & al. , Exercices dAnalyse - II (2ème Ed.)
Rombaldi, Thèmes pour l'agrégation de mathématiques
Demailly, Analyse Numérique et équations différentielles