UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques

Développement : Comptage des racines réelles et complexes d'un polynôme.
Référence : Gantmacher, Théorie des matrices tome 2, Dunod

Soit $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[X]$. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P (dans $\mathbb{C}$, comptées avec leurs multiplicités). Soient $s_0, s_1, s_2, \dots$ les sommes des puissances des racines de P, $s_0 = n$. Considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique associée

$$S(u) = \sum_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j}u_iu_j, \text{ où } u = (u_0, \dots, u_{n-1}).$$

Théorème de Hermite-Sylvester. *Soit (s,t) la signature de la forme quadratique S. Le nombre de racines réelles distinctes de P est $s-t$. Le nombre de racines complexes distinctes est égal au rang $s+t$.*

Preuve :

1. Montrer que $B = {}^tVV$ où V est la matrice de Vandermonde de $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Alors la forme quadratique S s'écrit
$$S(u_0, \dots, u_{n-1}) = (u_0 + u_1\alpha_1 + \cdots + u_{n-1}\alpha_1^{n-1})^2 + \cdots + (u_0 + u_1\alpha_n + \cdots + u_{n-1}\alpha_n^{n-1})^2$$
2. Supposons que P a q racines distinctes et notons $l_1, \dots, l_q$ les formes linéaires correspondant à ces différentes racines. On a donc $S = \sum_{k=1}^q m_k l_k^2$, où les m_k sont les multiplicités des racines. Montrer que les formes sont linéairement indépendantes. (le déterminant de Vandermonde formé par leurs q premiers coefficients est non nul).
3. En déduire que le rang de S est égale à q.
4. Montrer que le nombre de racines réelles de P est égale à $s - t$.
Indice : Si la forme l_k correspond à une racine complexe non réelle (et $\bar{l}_k$ à sa conjuguée), on a, en notant v et w les formes linéaires à coefficients réels telles que $l_k = v + iw$ et $\bar{l}_k = v - iw$:
$$m_k(l_k^2 + \bar{l}_k^2) = 2m_kv^2 2m_kw^2.$$

Exercice. Calculer la matrice B et son déterminant pour $P = X^2 + bX + c$ et pour $P = X^3 + pX + q$.

Compléments :

1. Montrer que le déterminant de B est égal au discriminant de P :

$$\det(B) = \Delta_P = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

2. Formules de Newton. (Gourdon, Algèbre, Ellipses)
Désignons par σ_k le k-ème polynôme symétrique élémentaire

$$\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k}.$$

Alors $\sigma_k = (-1)^k a_k$.
Montrons les formules de Newton (relations entre les sommes des puissances et les polynômes élémentaires) :
- pour $k \ge n$: $s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0$,
- pour $k \le n$: $s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \dots + (-1)^k k \sigma_k = 0$.

1. Soit T une indéterminée et considérons $Q(T) = T^n P(1/T)$. Montrer que

   $$Q(T) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j T^j = \prod_{i=1}^{n} (1 - T\alpha_i),$$

   où $\sigma_0 = 1$.
2. En dérivant formellement les expressions de droite et de gauche et ensuite en multipliant les resultats par T montrer que

   $$\begin{aligned} TQ'(T) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j j \sigma_j T^j &= -(\sum_{k=1}^{n} \frac{T\alpha_k}{1 - T\alpha_k})(\prod_{i=1}^{n} (1 - T\alpha_i)) \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} s_k T^k)(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1} \sigma_i T^i) = (\sum_{k=1}^{\infty} s_k T^k)(-Q(T)) \end{aligned}$$

   En déduire les formules de Newton.

3. Calcul de la signature d'une forme quadratique réelle par la méthode de Gauss.
Déterminer le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - z^2 - 4yz + 2xz$.
2. $q(x, y, z) = xy + yz + zx$