UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2009/2010**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques Anneaux Principaux (exos de base)

On dit qu'un anneau commutatif unitaire A est *principal* s'il est intègre et tout idéal de A peut être est engendré par un élément. Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, on supposera A principal.

Exercice 1. (Autour de Bezout)

a) Soit $a, b \in A$ et soit $(a, b) = (d)$. Montrer que $d = \text{pgcd}\,(a, b)$ et qu'il existe $x, y \in A$ tels que
$$d = xa + yb.$$

b) (Lemme de Gauss) Soit a, b, c trois éléments non-nuls de A. Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc, alors a divise c.

c) Soit $a, b \in A$ et soit $(a) \cap (b) = (m)$. Montrer que $m = \text{ppcm}\,(a, b)$ et que :
$$ab = \text{ppcm}\,(a, b) \times \text{pgcd}\,(a, b).$$

d) *(Théorème chinois)* Completer l'énoncé suivant : *Supposons que* $a_1, \ldots, a_m \in A$ *sont deax à deux premiers entre eux. Alors l'anneau quotient* $A/(a_1 \cdots a_n)$ *est isomorphe à* . . . .

Exercice 2.

a) *S*oit k un corps. Montrer que $A = k[X]$ est principal.

b) Montrer que l'idéal $(2, X) \subset \mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

c) Soit A un anneau quelconque. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 3. *(Eléments irréductibles)*

a) (Lemme d'Euclide) Montrer que, si $p \in A$ est irréductible et p divise ab alors $p|a$ ou $p|b$.

b) Montrer que dans un anneau principal les condtions suivantes sont équivalentes

   (i) $a \in A$ est irréductible.

   (ii) (a) est un idéal premier.

   (iii) (a) est un idéal maximal.

Exercice 4. *(Anneaux principaux sont noethériens)*
Montrer que toute suite croissante
$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$
d'idéaux de A est stationnaire.

Exercice 5. *Modules sur un anneau principal.*
Soit A un anneau intègre et M un A-module. On dit qu'un élément $m \in M$ *est de torsion* s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $am = 0$. On note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M. On dit que M *est de torsion* si $T(M) = M$, et *sans torsion* si $T(M) = 0$.

a) Montrez que $T(M)$ est un sous-module de M.

b) Montrez qu'un groupe abélien fini est un $\mathbb{Z}$-module de torsion.

c) Rappeler le théorème de classification des modules de type fini sur un anneau principal.

d) Donnez les facteurs invariants des $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.