UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques Localisation des racines

Exercice 2. (Majorations)
Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - X_i) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$. Soit $R_0 = \max_i |X_i|$. Vérifier que si $R > 0$ satisfiait $R^n \geq |a_1|R^{n-1} + \cdots + |a_n|$ alors $R_0 \leq R$. En déduire que

1. $R_0 \leq \max\{1, \sum_i |a_i|\}$
2. $R_0 \leq \max\{(n|a_k|)^{1/k}); k = 1, \ldots, n\}$

Exercice 1.(Théorème de Lucas)
Si P est un polynôme à coefficients complexes, l'ensemble des zéros de P' est contenu dans l'envellope convexe des zéros de P.

1. Soit $P(z) = \prod_{i=1}^{k}(z - z_i)^{n_i}$. Montrer que
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{z - z_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\overline{(z - z_i)}}{|z - z_i|^2}.$$
2. En déduire le théorème de Lucas.
3. Montrer que le barycentre des racines de P est le même que le barycentre des racines de P' (le poids associé à chaque racine étant sa multiplicité comme racine du polynôme).
(Indice : Réduire au cas où $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ avec $a_1 = 0$).

Exercice 3. (Règle de Descartes)
Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - X_i) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[X]$, $a_0 \neq 0$. *Soit V le nombre des changements des signes dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (zéro n'est pas compté comme un changement de signe). Alors le nombre des racines réelles strictement positives (avec multiplicités) de P est égale à $V - 2m$, pour un entier positive m.*

1. Proposer un critère similaire pour compter le nombre des racines strictement négatives (avec multiplicités). Montrer que si les polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ a toutes ses racines réelles alors la suite des signes de ses coefficients déterminent les signes de ses racines.
2. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que s' il manque un coefficient entre deux coefficients de même signe alors P possède au moins deux racines imaginaires.
3. Signes des valeurs propres de
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}?$$
4. Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul. Désignons par $S(P)$ le nombre des changement des signes dans la suite des coefficients de P. Soit $Q = P(X - a), a > 0$. Montrer que $S(Q) - S(P)$ est un nombre impaire strictement positif. En déduire la règle de Descartes.