UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences Préparation à l'agrégation
Département de Mathématiques
TD Polynômes et racines, polynômes symétriques, relation coefficients-racines

Exercice 1. (Polynômes symétriques élémentaires)
Désignons par σ_k le k-ème polynôme symétrique élémentaire

$$\sigma_k(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}.$$

1. Rappeler l'énoncé du théorème fondamental des polynômes symétriques.
2. Rappeler les formules de Viète (relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme) .
3. Exprimer en termes des polynômes symétriques élémentaires
   (a) $\sum X_i^2$, $n\ge 2$
   (b) $\sum X_i^3$, $n\ge 3$
   (c) $\sum_{i\ne j} X_i^2X_j^2$, $n\ge 4$

Exercice 2. (Formules de Newton). Soit

$$S_k(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^n X_i^k.$$

1. Nous alons montrer les formules de Newton (relations entre les sommes des puissances et les polynômes élémentaires) :
   - pour $k\ge n$: $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0$,
   - pour $k\le n$: $S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^k k\sigma_k=0$.

   Soit T une indéterminée distincte de $X_1,\ldots,X_n$
   (a) Montrer que
   $$\sum_{j=0}^n(-1)^j\sigma_jT^j=\prod_{i=1}^n(1-TX_i),$$
   où $\sigma_0=1$.
   (b) En dérivant formellement les expressions de droite et de gauche et ensuite en multipliant les resultats par T montrer que
   $$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n(-1)^j j\sigma_jT^j &= -(\sum_{k=1}^n\frac{TX_k}{1-TX_k})(\prod_{i=1}^n(1-TX_i))\\ &=(\sum_{k=1}^\infty S_kT^k)(\sum_{i=0}^n(-1)^{i-1}\sigma_iT^i)\end{aligned}$$
   En déduire les formules de Newton.
2. Résoudre
$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=18\end{cases}$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que si la trace $Tr(A^k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$ alors A est une matrice nilpotente.
4. Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique zéro alors tout polynôme symétrique de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme en $S_1, \dots, S_n$. Est-ce que ce resultat est vrai pour un corps de caractérstique $p > 0$?

Exercice 3. $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - X_i) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[X]$. Considérons la matrice $M = (S_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $S_0 = n$.

1. Montrer que $M = V^t V$ où V est la matrice de Vandermonde de $X_1, \cdots, X_n$. Alors la forme quadratique associée à M s'écrit
$$Q(Y_1, \dots, Y_n) = (Y_1 + Y_2 X_1 + \cdots + Y_n X_1^{n-1})^2 + \cdots + (Y_1 + Y_2 X_n + \cdots + Y_n X_n^{n-1})^2$$
2. Sous la condition que les racines de P sont simples montrer que le nombre de racines réelles est égale à la signature de M c.à.d. le nombre des valeurs propres positives de M moins le nombre des valeurs propres négatives.
Indice : Si $X_i \notin \mathbb{R}$ alors $\bar{X}_i$ est une racine de P et
$$(\sum_{j=1}^{n} Y_j X_i^{j-1})^2 + (\sum_{j=1}^{n} Y_j \bar{X}_i^{j-1})^2 = 2(\sum_{j=1}^{n} Y_j \mathrm{Re}(X_i^{j-1}))^2 - 2(\sum_{j=1}^{n} Y_j \,\mathrm{Im}(X_i^{j-1}))^2$$
3. Dans les cas général montrer que le rang de M est égale au rang V, c.à.d. au nombre de racines complexes distinctes de P et la signature de M est égale au nombre de racines réelles distinctes de P. (Théorème de Hermite-Sylvester)