Une équation diophantienne est une équation polynomiale à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières.
Références : R. Descombes, Éléments de théorie des nombres ; D. Duverney Théorie des nombres.

Exercice 1. (L'équation de Pell).
Soit d un entier strictement positif qui n'est pas le carré d'un nombre entier.

a) Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

b) Montrer qu'il existe un entier $n \neq 0$ tel que l'équation $x^2 - dy^2 = n$ possède une infinité de solutions. (Utiliser le théorème de l'exercice 2)
On fixe un tel entier dans la suite de l'exercice.

c) Montrer qu'il existe des solutions distinctes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de l'équation $x^2 - dy^2 = n$ telles que $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ et $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$.

d) Écrire la fraction $(x_1 + y_1\sqrt{d})/(x_2 + y_2\sqrt{d})$ sous la forme $x_3 + y_3\sqrt{d}$. Montrer que x_3 et y_3 sont entiers et vérifient $(x_3)^2 - d(y_3)^2 = 1$.

e) Soit $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ une solution de l'équation $x^2-dy^2 = 1$ où $v > 0$ est minimal. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ une autre solution. Si $y > 0$, simplifier $(x + y\sqrt{d})/(u + v\sqrt{d})$ et construire une solution $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ telle que $0 < y' < y$.

f) Montrer que les solutions de l'équation $x^2 - dy^2 = 1$ sont de la forme $(\pm x_k, \pm y_k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, où x_k et y_k sont déterminés par la relation $x_k + y_k\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})^k$. (Utiliser la méthode de descente infinie)

Exercice 2.

a) Soit α irrationnel. Montrer que pour tout entier $Q > 1$, il existe un rationnel p/q tel que $1 \leq q < Q$ et $0 < |q\alpha - p| \leq 1/Q$. (Utiliser le principe des tiroires)

b) Montrer le resultat suivant :
Théorème (Dirichlet). Soit α irrationnel. Alors il existe une suite infinie de rationnels $P_k, /Q_k$ vérifiant
$$0 < |\alpha - P_k/Q_k| \leq 1/Q_k^2.$$

Exercice 3.*(Equations diophantiennes du premier du premier degré)*

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x + 4y = c$ pour $c = 0, 1, 6$.

b) Montrer que l'équation $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, admet une solution entière ssi le $pgcd(a, b)$ divise c

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $15x + 6y + 10z = 1$.

d) Montrer que l'ensemble des solutions de $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ et $B \in \mathbb{Z}^n$ est soit vide soit de la forme : une solution particulière plus un sous-réseau de $\mathbb{Z}^p$ de rang $p - rg(A)$.