Rappel : On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est *algébrique* s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P \neq 0$, tel que $P(\alpha) = 0$.
(Soient $\mathbb{K} \subset \mathbf{L}$ deux corps commutatifs, on dit que $\alpha \in \mathbf{L}$ est *algébrique sur* $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, tel que $P(\alpha) = 0$.)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ *algébrique*. Le polynôme unitaire $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, de degré minimal, est unique et est appelé polynôme minimal de α. Un polynôme unitaire annulant α est minimal ssi il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Son degré est appelé degré de α et est noté $\deg(\alpha)$.
On dit que α est *un entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

Critères d'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$: Soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$.
- P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement s'il l'est sur $\mathbb{Z}$ (lemme de Gauss).
- S'il existe p premier tel que $p|a_i$ pour tout i et $p^2 \not| a_n$, P est irréductible (critère d'Eisenstein)
- Si l'image de P dans $\mathbf{F}_p[X]$ est irréductible, P est irréductible.

Exercice 1. Soit $d > 1$ un entier sans facteur carré. Montrer que $(1+\sqrt{d})/2$ est un nombre algébrique de degré 2. Montrer que $(1+\sqrt{d})/2$ est un entier algébrique ssi $d \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 2.

a) Etudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ des polynômes : $X^3 + 3X^2 + 3X + 6$, $X^4 + 1$, $(X^p - 1)/(X - 1)$, p premier.
b) Quel est le polynôme minimal de : $1 + \sqrt[3]{5}$, $e^{2\pi i/p}$, p premier ?

Exercice 3.

a) Donner le polynôme minimal P de $\sqrt{2} + i$ sur $\mathbb{Q}$.
b) Montrer que pour tout nombre premier p, l'image de P dans $F_p[X]$ n'est pas irréductible (utiliser le fait que pour $p > 2$ les carrés forment un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathbf{F}_p^*$).

Exercice 4.

a) Montrer que $P(X) = X^3 - 3X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
b) Soit α une racine de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que $(\alpha + 1)^{-1}$ peut s'écrire $a\alpha^2 + b\alpha + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
c) Calculer a, b, c.

Exercice 5. Corps des nombres algébriques.

a) Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ deux entiers algébriques. Montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont aussi des entiers algébriques. (utiliser le théorème des polynômes symétriques).
b) En déduire que les entiers algébriques forment un anneau et les nombres algébriques forment un corps.

Exercice 6. L'existence des nombres transcendants.
On dit que $\alpha \in \mathbb{C}$ est *transcendant* s'il n'est pas algébrique.

a) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est denombrable. En déduire l'existence des nombres transcendants. (démonstration de Cantor)

b) Soit a un nombre algébrique de degré $d > 1$ et soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré d annulant a.

   (a) Déduire du théorème des accroissements finis qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|x - a| \geq c|P(x)|$ pour tout $x \in [a-1, a+1]$.

   (b) En déduire qu'il existe $c' > 0$ tel que $|a - p/q| \geq c'/q^d$ pour tout nombre rationnel p/q.

   (c) Montrer que le nombre $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ n'est pas algébrique. (démonstration de Liouville)