Ch. III Applications linéaires

No.
Date.

III.1. Généralités

Déf. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si
$$\forall x,y \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$-e.v noté $\mathcal{L}(E,F)$ (c.à.d la somme de deux applications linéaires est linéaire et le produit par un scalaire est linéaire)

Propriétés :
(i) Si f est linéaire alors $f(0) = 0$
(ii) La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Déf. On dit que f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v. s'il existe $g : F \to E$ linéaire t.q. $f\circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Si un tel g existe alors il est unique et on le note f^{-1}.

Critère f est un isomorphisme ssi il est bijective.

Déf. Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme.
automorphisme = endomorphisme + isomorphisme

Proposition (Propriété universelle des espaces vectoriels munis de base).
Soit $\beta = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout e.v F et toute famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, $\exists !\ f : E \to F$ t.q. $f(e_i) = u_i$

Preuve on pose $f\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right) = \sum_{i\in I} x_i u_i$ $\square$

Corollaire Deux $\mathbb{K}$-e.v. sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
En particulier, tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Preuve si $f : E \to F$ isomorphisme et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E alors $(f(e_i))$ est une base de F et $\dim E = \dim F$.
Réciproquement, supposons $\dim E = \dim F$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et soit $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ une base de F. Alors
$\exists !\ f : E \to F$ linéaire t.q. $f(e_i) = \varepsilon_i$
$\exists !\ g : F \to E$ — " — t.q. $g(\varepsilon_i) = e_i$

Alors $g\circ f$ est linéaire et $g\circ f(e_i) = e_i$. Par la propriété universelle $g\circ f = id_E$, de même $f\circ g = id_F$. $\square$

No.
Date.

III 2. Noyau. Image. Théorème du rang

<u>Proposition</u> L'image d'un s.e.v de E par une application linéaire $f : E \to F$ est un s.e.v de F. L'image réciproque d'un s.e.v de F par f est un s.e.v de E.

<u>Déf</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle <u>noyau</u> de f l'ensemble
$$\ker f = f^{-1}(0) = \{x \in E \; ; \; f(x) = 0\}.$$
On appelle image de f l'ensemble $f(E) = \mathrm{Im} f$.

<u>Proposition</u> (<u>Critère d'injectivité</u>) $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective ssi $\ker f = \{0\}$.

<u>Déf</u> Si $\dim \mathrm{Im} f < \infty$ alors l'entier $\dim \mathrm{Im} f$, est appelé rang de f et noté $\mathrm{rg}\, f$.

<u>Théorème (du rang)</u> Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est de rang fini et
$$\dim E = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \ker f + \mathrm{rg}\, f.$$

<u>Preuve</u> Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\ker f$. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Montrons que $\mathcal{B} = (f(e_{k+1}), \dots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

- $\mathcal{B}$ est génératrice : si $u \in \mathrm{Im} f$ alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.q.
$$u = f(\sum \lambda_i e_i) = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i) + f(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i) = 0 + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(e_i)$$
- $\mathcal{B}$ est libre : Si $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0$ alors $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in \ker f$
$$\Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = 0$$

Alors $r = \dim \mathrm{Im} f = n - k$. $\square$

<u>Remarque</u> Après une permutation des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$ on obtient une base $\mathcal{B}_E = (e'_1 = e_{k+1}, \dots, e'_r = e_n, e'_{r+1} = e_1, \dots, e'_n = e_k)$ et une base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f}$ $(f(e'_1), \dots, f(e'_r)) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ de $\mathrm{Im} f$ t.q. la matrice de $f : E \to F$ dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\mathrm{Im} f}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \quad Y = AX$$

c.à.d $f(\sum_{j=1}^{n} x_j e'_j) = \sum_{i=1}^{r} y_i \epsilon_i$

Ici $\dim E = n$.

No.
Date.

Si $\dim F = p < \infty$, on complète $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_r)$ en une base $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p) = \mathcal{B}_F$ et la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ est

$$r\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{r}\right\}p \qquad r = \text{rang} f = \text{rang de la matrice}$$

<u>Corollaire</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où $\dim E = \dim F < \infty$. Alors

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective

<u>Rq.</u> Ce résultat est faux en dimension infinie.

Ex 1 : $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P'$ est surjective mais pas injective
Ex 2 : $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$; $f(P) = XP$ est injective mais pas surjective

<u>Déf.</u> Soit F un s.e.v de E. La relation R définie par xRy si $x-y \in F$ est une relation d'équivalence. L'<u>espace quotient</u>, noté E/F, est un e.v. muni des lois $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$, $\lambda\bar{x} = \overline{\lambda x}$.

La projection $p : E \to E/F$, $p(x) = \bar{x}$, est une application linéaire de noyau F et $\text{im}\, p = E/F$.

<u>Proposition</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\text{Im} f$ est isomorphe à $E/\ker f$.

<u>Preuve.</u> Soit $\bar{f} : E/\ker f \to \text{Im} f$ définie par $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$
Alors $\bar{f}$ est
1) bien définie : si $\bar{x} = \bar{y}$ alors $f(x) = f(y)$
2) linéaire
3) injective si $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ alors $x \in \ker f$
4) surjective

<u>Proposition (Factorisation d'une application linéaire)</u>
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $f = i \circ p$ où i est injective et p est surjective.

$$E \xrightarrow{p} E/\ker f \simeq \text{Im} f \xhookrightarrow{i} F$$

No.
Date. III.3. Applications linéaires et systèmes linéaires

Considérons le système

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

et application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ définie par

$$f(x_1, .., x_n) = (\sum a_{1j} x_j, \ldots, a_{pj} x_j) = (y_1, .., y_p)$$

$Y = AX$, où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Alors : $Sol(S) = f^{-1}(b)$ $\qquad b = (b_1, .., b_p)$

$Sol(S_{hom}) = \ker f$

$\{b \in F ;\ S \text{ est compatible}\} = \operatorname{Im} f$.

Réciproquement, soit $\mathcal{B}_E = (e_1, .., e_n)$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$f(\sum x_j e_j) = \sum y_i \varepsilon_i$$

où $Y = AX$, c.à.d. $y_i = \sum a_{ij} x_j$. Alors $\ker f$ dans la base $\mathcal{B}_E$ correspond à l'ensemble de solution de S'.

Considérons l'algorithme de Gauss matrice echelonné.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{1n} & \varepsilon_1 \\ & & \\ a_{p1} & a_{pn} & \varepsilon_p \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1j_1} & & & \varepsilon_1' \\ & \ddots & & \\ & & a_{rj_r} & \varepsilon_r' \\ 0 & \cdots & 0 \cdots & \vdots \\ & & & \varepsilon_p' \end{array}\right)$$

$(\varepsilon_1', .., \varepsilon_p')$ est une nouvelle base de F

Alors $\dim \ker f = \#$ variables libres

$\operatorname{Im} f$ est engendré par $\varepsilon_1', .., \varepsilon_r'$

$$\varepsilon_i' = f\left(\frac{1}{a_{ij_i}} e_{j_i}\right)$$

$\dim \operatorname{Im} f = \#$ variables de tête

Thm du rang : # nombres de variables libres + # nombre de variables de tête

$= \#$ des variables $x_1, .., x_n$