No.
Date.

VI. Déterminant

Déterminant est défini pour

1) Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det A \in \mathbb{K}$.

2) Une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$,
ou, plus généralement, pour une famille de n-vecteurs d'un e.v E de dimension n dans un base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$
$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$. Il dépend du choix de base (Gourdon)

Si $x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_j$, $i=1,\dots,n$, alors

$$\det(x_1,\dots,x_n) := \det A$$

où $A = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ par vecteurs lignes (Gourdon)

ou $A = (x_{ji}) = (x_1 | \cdots | x_n)$ — " — colonnes (Grifone)

3) Un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie E

$$\det f := \det M_{\mathcal{B}}(f)$$

pour une base $\mathcal{B}$ de E. Il ne dépend pas du choix de base.

VI 1. Définition. Propriétés de base

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

Première propriétés.

1) Si A est triangulaire $a_{ij}=0$ si $j>i$ (ou $a_{ij}=0$ si $j<i$)
alors
$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

2) $\det {}^tA = \det A$ puisque signature σ^{-1} = signature σ

3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

4) $\det(A)$ dépend linéairement des colonnes (resp. des lignes) de A

5) dét est antisymétrique, pour $\tau \in S_n$

$$\det(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)\det(x_1, \dots, x_n)$$

(par $\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$)

Exemples $n=1$: $\det(a) = a$

$n=2$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$n=3$: règle de Sarrus

V/2. Développement selon une ligne ou une colonne

Déf Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i,j), on appelle mineur de l'élément a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A. Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le cofacteur de a_{ij}.

Proposition (ou une définition alternative)
Développement selon une ligne ou une colonne.

$$\forall j \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{(colonne)}$$

$$\forall i \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{(ligne)}$$

Preuve. Par un calcul direct.
On utilise la propriété : $\sigma \in S_n$. on fixe i et on considère

$\sigma' \in S_{n-1}$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, n-1\} & \simeq & \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \\ \downarrow \sigma' & & \downarrow \sigma \\ \{1, \dots, n-1\} & \simeq & \{1, \dots, \widehat{\sigma(i)}, \dots, n\} \end{array}$$

alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i+j}\varepsilon(\sigma')$, où $j = \sigma(i)$. $\square$

No.
Date.

Corollaire (Le caractère alterné du déterminant
S'il existe $i \neq j$ t.q. $x_i = x_j$ alors
$dét(x_1, \dots, x_n) = 0$

Preuve récurrence sur n.
Cas $n=1$: l'énoncé est vide
Cas $n=2$ par la formule $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 0$ si $x_{11} = x_{21}$
et $x_{12} = x_{22}$

$n \Rightarrow n+1$ pour $n \geq 2$.
On considère $A = (x_1 | \cdots | x_n)$ et on développe selon
la k-ième colonne $k \neq i$ et $k \neq j$.
Par l'hypothèse de récurrence $\Delta_{sk} = 0 \quad \forall s$. $\square$

Déf On appelle transformation permises sur les lignes d'une matrice :
(1) ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
(2) multiplier une ligne par un scalaire non nul λ
(3) Echanger deux lignes.

Corollaire Si A' est obtenue de A par une transformation permise alors dans chaque cas
(1) $dét(A') = dét(A)$
(2) $dét(A') = \lambda\, dét(A)$ (vrai aussi pour $\lambda = 0$)
(3) $dét(A) = -\, dét(A)$

Théorème $dét\, AB = dét\, A \cdot dét\, B$

Preuve
(Gritone, par brute force, on remplace colonnes par lignes)
$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix}$

$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$

$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix}$ $\qquad c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk}$

$$c_i = \left(\sum_j a_{ij} b_{j1}, \dots, \sum_j a_{ij} b_{jn} \right) = \sum_j a_{ij} b_j$$

No.
Date.

$$\text{dét}\, C = \text{dét}\begin{pmatrix} \sum'_j a_{1j}\, b_j \\ \vdots \\ \sum'_j a_{nj}\, b_j \end{pmatrix} = \sum'_{j_1,\dots,j_n} \prod_i a_{i j_i}\, \text{dét}\begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} =$$

puisque $\text{dét}\begin{pmatrix} b_{j_1} \\ \vdots \\ b_{j_n} \end{pmatrix} = 0$ s'il existe $j_{k_1} = j_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$.

$$= \sum'_{\sigma \in S_n} \prod a_{i\sigma(i)}\, \varepsilon(\sigma)\, \text{dét}(B) = \text{dét}\, A \cdot \text{dét}\, B$$

<u>Rémarque</u> (importante)

Tous ces résultats sont vrais pour les matrices à coefficients dans un anneau commutatif.

<u>Théorème</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et soit $C(A) = (A_{ij})$ la <u>comatrice</u> de A. Alors

$$A\, {}^t(C(A)) = {}^t(C(A))\, A = (\text{dét}\, A)\, I_n$$

<u>Preuve</u> Soit $A\, {}^tC(A) = (b_{ij})$

alors $b_{ij} = \sum'_k a_{ik} A_{jk} = \text{dét}\, A$ si $i = j$

Il reste à montrer que $\sum'_k a_{ik} A_{jk} = 0$ si $i \neq j$

Considérons la matrice A' obtenue de A en remplaçant la j-ième ligne de A par la i-ième ligne
Alors $A'_{jk} = A_{jk}$

$$0 = \text{dét}\, A' = \sum'_k a'_{jk} A'_{jk} = \sum'_k a_{ik} A_{jk} \qquad \square$$

<u>Corollaire</u> $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\text{dét}\, A \neq 0$.
Si c'est le cas

$$\text{dét}\, A^{-1} = \frac{1}{\text{dét} A}\, {}^t(C(A)).$$

No.
Date.

Corollaire (Formules de Cramer)
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible et considérons le système linéaire

$$AX = B \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

Alors ce système admet une unique solution

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det A}$$

où A_k est la matrice carrée formée en ramplaçant la k-ième colonne de A par le vecteur colonne B.

Preuve $X = A^{-1} B$

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_j A_{jk} b_j = \frac{1}{\det A} \det A_k \qquad \text{(développé selon la k-ième colonne)}$$

Remarque Gabriel Cramer, mathématicien suisse (1704-1752)

Les formules de Cramer sont entre des premièrs résultats de l'algèbre linéaire.

Remarque Sur un anneau on a

$${}^t c(A) A X = \det A \, X = {}^t c(A) B$$

Corollaire Si $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\det A = \det A'$

Définition Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E < \infty$. Alors

$$\det M_{\mathcal{B}}(u)$$

ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$. On l'appelle déterminant de u.

Si $\mathcal{B}'$ une autre base de E alors

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(u) P, \qquad \text{où } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

et $\det(M_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(P^{-1}) \det(M_{\mathcal{B}}(u)) \det(P) = \det(M_{\mathcal{B}}(u))$

No.
Date.

VI 3 Formes multilinéaires.

Soient $E_1, \dots, E_p, F$ des $\mathbb{K}$-e.v. Une application

$$f : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$$

est dite <u>p-linéaire</u> si en tout point les p applications partielles sont linéaires. L'ensemble de ces applications est noté $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p ; F)$. Si $E_1 = \dots = E_p = E$ et $F = \mathbb{K}$ on parle de formes p-linéaires sur E. L'ensemble de telles formes est noté $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$. C'est un $\mathbb{K}$-e.v.

$$\dim \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K}) = (\dim E)^p$$

<u>Déf</u>. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E ; \mathbb{K})$.
On dit que f est <u>alternée</u> si $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ t.q. $x_i = x_j$.

On dit que f est <u>antisymétrique</u> si l'échange de deux vecteurs dans $x_1, \dots, x_p$ donne à f des valeurs opposée.

<u>Thm</u> Toute forme alternée est antisymétrique.
Si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$ alors la réciproque est vrai.

<u>Preuve</u> On fixe x_k $k = 1, \dots, p$, $k \neq i$; $k \neq j$ et on note

$$\varphi(x, y) = f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)$$

alors $\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y)$
(l'égalité de polarisation)

Si f est alternée ça donne $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$

Si f est antisymétrique alors $\varphi(x, x) = -\varphi(x, x)$

et $\varphi(x, x) = 0$ si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$.

<u>Ex</u>. Sur $\mathbb{F}_2^2$ une 2-forme de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
est (anti)symétrique ssi $b = c$
est alternée ssi $a = d = 0$ et $b = c$

No.
Date.

<u>Théorème</u> L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension 1. De plus, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée prenant la valeur 1 sur une base donnée de E.

<u>Preuve</u>
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit
$$d(x_1, \dots, x_n) = e_1^*(x_1) \dots e_n^*(x_n) \quad , \quad x_i = \sum_j x_{ij} e_j$$
et
$$d^\sharp(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) d(x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n})$$

Alors $d^\sharp(e_1, \dots, e_n) = 1$

Si f est alternée alors $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} x_{1 i_1} \cdot x_{n i_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma_n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) =$$

$$f(e_1, \dots, e_n)\, d^\sharp(x_1, \dots, x_n)$$ (d dièse)

<u>Corollaire</u> $\det AB = \det A \cdot \det B$

<u>Preuve</u> On fixe A. Considérons la forme n-linéaire alternée
$$f(b_1, \dots, b_n) = \det A \cdot (b_1 | \dots | b_n)$$

Par thm. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ t.q. $f(b_1, \dots, b_n) = \lambda \det(b_1 | \cdots | b_n)$ pour toute famille de n vecteurs $b_i \in \mathbb{K}^n$. En particulier
$$f(e_1, \dots, e_n) = \det A \cdot I_n = \det A$$
$$= \lambda \det(e_1 | \dots | e_n) = \lambda$$

Alors $\lambda = 1$ et $\det AB = \det A \cdot \det B$ $\square$

No.
Date.

Remarque La formule $\det AB = \det A \cdot \det B$ est vraie pour les matrices à coefficents dans un anneau commutatif $\mathcal{A}$. En effet, si $\mathcal{A}$ est intègre alors $\mathcal{A} \subset Fr(\mathcal{A})$ le corps des franctions de $\mathcal{A}$. Alors la formule étant vraie sur $Fr(\mathcal{A})$ par thm. est vraie sur A. En particulier elle est vraie sur

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}[A_{ij}, B_{kl}]_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...n \\ k=1,..n \\ l=1,..,n}} \quad , A_{ij}, B_{kl} \text{ indéterminés}$$

Soit une formule $\Phi(A_{ij}, B_{kl}) = 0$ dans $\mathbb{Z}(A_{ij}, B_{kl})$ et soit $\mathcal{A}'$ un anneau commutatif, quelconque. Soit $a_{ij} \in \mathcal{A}'$, $b_{kl} \in \mathcal{A}'$
La formule
$$\varphi(A_{ij}) = a_{ij} \ , \ \Phi(B_{kl}) = b_{kl}$$
définit un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. Alors
$$\Phi(a_{ij}, b_{kl}) = \Phi(\varphi(A_{ij}), \varphi(B_{kl})) = \varphi(\Phi(A_{ij}), \Phi(B_{kl})) = 0$$

$\overline{V}$/ 4 Calcul pratique

En pratique pour calculer un déterminant on utilise
- développement selon une ligne ou une colonne
- l'algoritme du pivot de Gauss.

No.
Date.

VI 5. Déterminant et le rang.

Proposition 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}\, A = n$ ssi $\det A = 0$

2) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n et soit β une base de E. Alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E ssi

$$\det_\beta (v_1, \dots, v_n) \neq 0$$

On appelle mineur d'ordre r d'une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ le déterminant d'une matrice d'ordre r extraite de A.

Théorème Le rang d'une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ est l'ordre maximal des mineurs non nuls extrait de A.

Corollaire $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$.

VI 6 Interpretation géométrique du déterminant

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$, c.à.d de l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^n ;\ x = \sum \lambda_i v_i ;\ 0 \leq \lambda_i \leq 1,\ i = 1, \dots, n\}$$

Alors $\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Application Le déterminant jacobien et la formule de changement de variables.

Déf Soit $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. La matrice de Gram associée à $v_1, \dots, v_n$ est

$$M_G = (\langle v_i | v_j \rangle)_{i,j = 1, \dots, k}$$, où $\langle v_i | v_j \rangle$ c'est le produit scalaire

Le déterminant de Gram est le déterminant de cette matrice. On le note $G(v_1, \dots, v_k)$

Théorème $G(v_1, \dots, v_k) = (Vol(v_1, \dots, v_k))^2$, où

$Vol(v_1, \dots, v_k)$ c'est le k-volume du parallélépipède

$$\{x \in \mathbb{R}^n ; x = \sum \lambda_i v_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \dots, k\}$$

Déf On dit que deux bases $\beta = (e_1, \dots, e_n)$, $\beta' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ont m̂ orientation si

$$\det P_\beta^{\beta'} > 0$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elles ont une orientation opposée.

Proposition Avoir m̂ orientation est une relation d'équivalence. Il y a exactement 2 classes d'équivalence

Définition Une orientation de E c'est le choix d'une de ces deux classes d'équivalence.