UE 4 Algèbre linéaire et bilinéaire

No.
Date.

Ch I. Espaces Vectoriels. Dimension.

I.1. Espaces vectoriels.

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (e.v. sur $\mathbb{K}$) un triplet $(E,+,\cdot)$ formé d'un ensemble $E \neq \emptyset$ muni d'une loi interne $+$ et une loi externe $\cdot$, vérifiant

1) $(E,+)$ est un groupe abélien.

2) $\forall_{x,y \in E}\ \forall_{\lambda,\mu \in \mathbb{K}}$
$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$$
$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu y$$
$$\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\cdot\mu)x$$
$$1x = x$$

Rq: Par conséquence $\lambda\cdot 0 = 0$ $\forall_{\lambda \in \mathbb{K}}$, 0 l'élément neutre de $(E,+)$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires)

Exemples: 1) $E = \mathbb{K}^n \ni (x_1,\dots,x_n) = x$.
$$(x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$\lambda(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

2) $E = \mathbb{K}[X]$: $P = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ presque tous $a_i = 0$

$Q = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$. $P+Q = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i+b_i) X^i$, $\lambda P_i = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda a_i) X^i$

Déf Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$e.v.

Critère $F \subset E$ est un s.e.v de E ssi
(i) $F \neq \emptyset$ (ii) F stable par addition
(iii) F stable par multiplication externe

Proposition Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de s.e.v de E alors
$$\bigcap_{i \in I} E_i \text{ est un s.e.v de } E.$$

Rq. Faux pour la réunion.

No.
Date.

I2. Sommes, sommes directes

Déf Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors
$\sum_{i\in I} E_i = \{ \sum_{i\in I} x_i ,\ x_i \text{ presque tous nul} \}$ est un s.e.v. de E
appelé somme des s.e.v $E_i, i\in I$.

Notation pour un nombre fini de s.e.v : $E_1 + E_2 + \cdots + E_n$

Déf On dit que $E_1, \ldots, E_n$ sont en somme directe si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme
$x = x_1 + \cdots + x_n$, où $x_i \in E_i$

On note $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$

Rq $E = E_1 \oplus E_2$ ssi $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

Produit et somme directe externe

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de e.v. On définit une structure de e.v sur le produit cartesien.

$\prod_{i\in I} E_i \ni (x_i)_{i\in I}$ par

$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$; $\lambda (x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I}$

Alors $\bigoplus_{i\in I} E_i$ est un s.e.v. de $\prod_{i\in I} E_i$ tq. $(x_i)_{i\in I} \in \bigoplus_i E_i$ si presque tous x_i sont nuls.

Exercice Pour I fini. $\prod_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

No.
Date.

I 3. Familles génératrices. Familles libres. Bases.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E. On appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ toute somme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout i et $\lambda_i = 0$ pour presque tous $i \in I$.

Déf Espace engendré. L'ensemble des combinaisons linéaires $\sum' \lambda_i x_i$ est un s.e.v de E noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.

Soit $A \subset E$ sous-ensemble. Alors le plus petit s.e.v de E contenant A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

Rq : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

Déf On dit que $A \subset E$ est une partie génératrice de E si $\mathrm{Vect}(A) = E$.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille generatrice de E si $E = \mathrm{Vect}(\{x_i ; i \in I\})$
Déf On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre si
(i) pour toute combinaison linéaire

$$\sum_{i\in I}' \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall_{i\in I},\ \lambda_i = 0$$

ou de manière équivalente
(ii) Aucun vecteur de cette famille n'est combinaison linéaire des autres.
Dans le cas contraire on dit que la famille est liée.

Déf $(x_i)_{i\in I}$ est une base si elle est libre et génératrice.

Prop $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ssi $\forall_{x\in E}\ \exists!_{\lambda_i}\ x = \sum' \lambda_i e_i$
Les λ_i s'appellent les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$
Déf On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème Soit E un e.v. $\mathcal{G}$ un système de générateurs de E, $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ un système libre. Alors $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E t.q.

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$$

No.
Date.

Corollaire (théorème de la base incomplète)

Toute famille libre peut être completée en une base.

Preuve du thm

Cas facile : $\mathcal{G}$ fini :

Considerons toutes les sous-familles $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ t.q. $\mathcal{G}' \supset \mathcal{L}$.
Soit $m = \max\{k ; \exists\, \mathcal{G}'$ libre , $|\mathcal{G}'| = k\}$
Soit $\mathcal{B}$ t.q. $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, $|\mathcal{B}| = m$, $\mathcal{B}$ libre. Alors $\mathcal{B}$ est une base.

En effet. Soit $x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée. Sa entraine $x \in Vect(\mathcal{B})$. Sa montre que $\mathcal{G} \subset Vect(\mathcal{B})$ et

$$E = Vect(\mathcal{G}) \subset Vect\,\mathcal{B} \subset E$$

D'où $E = Vect(\mathcal{B})$.

Cas difficile $\mathcal{G}$ infini.

- On considère l'ensemble $\mathcal{X}$ des parties libres de E contenant $\mathcal{L}$ et contenus dans $\mathcal{G}$

- On montre que cet ensemble est inductif pour l'inclusion. (On dit qu'un ensemble ordonné $(\mathcal{X}, <)$ est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{X}$ admet une borne supérieure)

- Par lemme de Kuratowski-Zorn
Tout ensemble inductif admet un élement maximal.
$\exists\, \mathcal{B} \in \mathcal{X}$ t. que $\forall_{x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{B}}$ $\mathcal{B} \cup \{x\} \notin \mathcal{X}$.

Alors $\mathcal{B}$ est une base.

$\square$

No.
Date.

I 4. Dimension.

Lemme (principal)
Dans un e.v. E engendré par n vecteurs $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ toute famille libre a au plus n éléments.

Preuve récurrence sur n.
$n=0$ clair
Considérons $\mathcal{F} = (f_j)_{j=1,\dots,n+1}$

$$\forall_j \; \exists_{\lambda_{ij}} \quad f_j = \sum \lambda_{ij} x_i$$

si $\forall_j \; \lambda_{nj}=0$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas libre par l'hypothèse de récurrence

supposons $\lambda_{n,n+1} \neq 0$. Pour $1 \leq j \leq n$, posons $g_j = f_j - \lambda_{nj} \lambda_{n,n+1}^{-1} f_{n+1}$

Les $g_j \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n-1}) \Rightarrow g_j$ sont liés

$\Rightarrow \mathcal{F}$ est liée $\square$

Théorème Soit E un e.v$/\mathbb{K}$. Alors toutes les bases de E ont $\hat{m}$ cardinal. Il s'appelle dimension de E, et est noté $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Preuve Dans le cas d'un espace de dimension finie.
ça résulte du lemme principal. $\square$

Proposition Soit $n = \dim_{\mathbb{K}} E$. Alors
- Tout système libre de n vecteurs est une base
- — " — générateur — " — — " —

Proposition Soient $E = E_1 + \dots + E_k$. $\dim E = n < \infty$. Alors
$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ ssi $\dim E = \sum \dim E_k$.

Déf Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors

Le rang $\mathrm{rg}\, \mathcal{F} = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.