No.
Date.

IV Calcul matriciel

Rappel : On note $M_{p,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (p,q) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- $n=1$ matrice colonne
- $p=1$ —''— ligne
- $M_{p,n}(\mathbb{K})$ est un e.v sur $\mathbb{K}$ de dimension $p\cdot n$

IV.1 Matrice d'une application linéaire

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F.

Pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$ on note

$$[x]_{\mathcal{B}_E} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_E$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$, notée par $M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$, ou simplement $M(f)$, est définie par l'identité

$$[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E} [x]_{\mathcal{B}_E} \quad , \forall x \in E$$

c.à.d. si on note pour $y = y_1 \varepsilon_1 + \cdots + y_p \varepsilon_p \in F$, $Y = [y]_{\mathcal{B}_F}$, et

$M(f) = A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}}$

$$Y = AX$$

$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

Les coordonnés des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ sont les colonnes successives de A

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \varepsilon_i$$

Exemple $M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E}(id_E) = I_n$ (matrice identité)

Proposition $\mathcal{L}(E,F) \ni f \longrightarrow M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

No.
Date.

Remarque Autres notatation pour $M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$

- $[f]_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}$ Gaurdon
- $M(f)_{e_i, \varepsilon_j}$ Grifone
- $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$

IV.2. Multiplication des matrices.

Déf : Soit $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}$; $B = (b_{jk}) \in M_{n,m}$ alors $C = (c_{ik}) \in M_{pm}$ définie par

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}$$

est appelée produit des matrices A et B et on note $C = AB$.

Propriétés

1) $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$, $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
2) En général $AB \neq BA$
(si $A \in M_{p,n}$ et $B \in M_{n,m}$, $p \neq m$, alors BA n'est pas définie !!)

Proposition Multiplication des matrices est associative.

Exercice Vérifier le directement.

Théorème (Matrice de la composée)

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev. Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ de bases de E, F, G respectivement. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors

$$M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_E}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_G}^{\mathcal{B}_F}(g)\, M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$$

Preuve pour tout $x \in E$

$$M(g \circ f)[x]_{\mathcal{B}_E} = [g(f(x))]_{\mathcal{B}_G} = M(g)\,[f(x)]_{\mathcal{B}_F} = M(g)\, M(f)\, [x]_{\mathcal{B}_E}$$

$\square$

No.
Date.

Corollaire La multiplication des matrices est associative.

Preuve La composition des applications est associative.
Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ alors $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$

En effet, $(h\circ g)\circ f(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)) = h(g\circ f(x))$
$= h\circ(g\circ f)(x)$

$\square$

IV.3 Matrices inversibles. Matrices de passage.

On note $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$ (matrices carrées)

Déf Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n \qquad (I_n \text{ matrice identité})$$

B est dite inverse de A et est notée A^{-1}.

Proposition $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E = \dim F < \infty$, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors f est un isomorphisme ssi $M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible. Si c'est le cas

$$M_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_F}(f)\right)^{-1}$$

Déf Pour deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E on note par $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'}$$

Si $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (a_{ij})$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$x = \sum_i x_i e_i = \sum_i x_i' \varepsilon_i$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_n' \end{pmatrix}$

alors $AX' = X$ $\qquad x_i = \sum_j a_{ij} x_j'$

Le j-ième colonne de A donne les coordonnés de ε_j dans la base $\mathcal{B}$.

No.
Date.

$\varepsilon_j = \sum_i a_{ij} e_i$.

<u>Proposition</u> $P_B^{B'} = M_B^{B'}(id_E)$

<u>Propriétés</u> 1) $P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1}$

2) $P_{B_1}^{B_2} P_{B_2}^{B_3} = P_{B_1}^{B_3}$

<u>Proposition</u> Soient $B_E, B_{E'}$ deux bases de E et soient $B_F, B_{F'}$ deux bases de F. Notons : $A = M_{B_F}^{B_E}(f)$, $A' = M_{B_F'}^{B_E'}(f)$, $P = P_{B_E}^{B_E'}$
$Q = P_{B_F}^{B_F'}$

$$A' = Q^{-1} A P$$

IV 4 Rang. Matrices equivalentes.

<u>Déf</u> Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille de vecteurs colonnes de A.

<u>Proposition</u> $rg\, M_{B_F}^{B_E}(f) = rg(f)$

<u>Proposition</u> $rg\, A = rg\, {}^tA$

(Démontrée plus tard)

<u>Déf</u> On dit que 2 matrices $A, A' \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont <u>equivalentes</u> s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$, $Q \in M_p(\mathbb{K})$, inversibles, t.q.

$$A' = Q^{-1} A P$$

<u>Théorème</u> $A, A' \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi $rg\, A = rg\, A'$

<u>Preuve</u> Par la preuve du thm du rang, si $rg\, A = r$ alors A est équivalente à $r\left\{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}\right.$ $\underbrace{}_{r}$

No.
Date.

Déf On dit que deux matrices carrée $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$, inversible t.q.

$$A' = P^{-1} A P.$$

IV 5 Matrices et l'algorithme de Gauss-Jordan.

On note $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad e_{kl} = \begin{cases} 1 & k=i, l=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

les matrices $(E_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ forment un base de $M_n(\mathbb{K})$.

Déf Matrice de transvection $T_{ij}(\alpha) = I + \alpha E_{ij}$

Matrice de transposition $P_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ on note $M_i(\lambda) = I - E_{ii} + \lambda E_{ii}$

Exercice $(T_{ij}(\alpha))^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $(M_i(\lambda))^{-1} = M_i(\lambda^{-1})$

Rq. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$T_{ij}(\alpha) A$ est la matrice obtenue de A en ajoutant à la i-ième ligne de A la j-ième ligne multiplier par α

$P_{ij} A$ on échange la i-ième et la j-ième ligne de A

$M_i(\lambda) A$ on multiplie la i-ième ligne par λ.

Alors étant donné un système linéaire

$$AX = B$$

En multipliant par un produit S de matrices $T_{ij}(\alpha), P_{ij}, M_i(\lambda)$ on obtient un système échelonné

$$(SA)X = SB$$

No.
Date.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible alors $\exists S$ t.q. $SA = I_n$ c.à.d $S = A^{-1}$

$$X = A^{-1} B$$

L'algorithme du calcul de la matrice inverse

1) Ecrire I_n à coté de A $\qquad (A \mid I)$

2) Performer les opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice élargie pour obtenir la matrice identité sur la partie gauche

$$(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})$$

La partie droite est égale à A^{-1}

Justification. Si $SA = I$ alors $SI = A^{-1}$. $\boxtimes$