

Ch. II Systèmes linéaires.

No.

Date.

Un système linéaire S à coefficients dans \mathbb{K} de p équations l_1, \dots, l_p à n inconnues x_1, \dots, x_n est de la forme

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & l_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p & l_p \end{cases}$$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_j \in \mathbb{K}$.

Si $b_1 = \dots = b_p = 0$ on dit que le système S est sans second membre ou homogène.

Nous noterons $\text{Sol}(S) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n; l_j(x) = b_j \text{ pour } j = 1, \dots, p\}$
l'ensemble des solutions de S .

Deux systèmes S_1 et S_2 à p inconnues sont équivalents si $\text{Sol}(S_1) = \text{Sol}(S_2)$

Rq. Si S est homogène alors $\text{Sol}(S)$ est un s.e.v de \mathbb{K}^n .
(facile à vérifier)

II.1. Systèmes triangulaires et échelonnés.

Système S est triangulaire s'il existe $r \leq p$ t.q.

- si $r < p$ on ait $a_{ij} = 0$ pour $r < i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$
- $a_{ij} = 0$ pour tout $1 \leq j < i \leq r$
- $a_{ii} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$

Système S est échelonné s'il existe un entier $r \leq p$ (le rang du système) t.q.

- si $r < p$ on ait $a_{ij} = 0$ pour $r < i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$
- pour $i \leq r$, notons par j_i l'indice du premier coefficient non nul de l_i . Alors j_1, \dots, j_r est strictement croissant

No. _____

Date. _____

Méthode du pivot de Gauss.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 3 & 9 & -3 & b \\ -2 & 1 & -5 & c \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 7 & -7 & c+2a \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & 7 & -7 & c+2a \\ 0 & 0 & 0 & b-3a \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & (c+2a)/7 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{a}{7} - 3\frac{c}{7} \\ 0 & 1 & -1 & (c+2a)/7 \end{array} \right)$$

$b-3a \neq 0$ impossible

$b-3a=0$ $Sol(S) = s + Vect((-2, 1, 1))$

$$= \left(\frac{a}{7} - 3\frac{c}{7}, \frac{c+2a}{7}, 0 \right) + Vect((-2, 1, 1))$$