V/ Invariants de similitude. Réduction de Frobenius

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v et soit u un endomorphisme de E, $\dim E < \infty$.

V/1. Endomorphismes cycliques

Déf Soit F un s.e.v de E, stable par u. On dit que u est F-cyclique (ou que F est u-monogène) s'il existe $x \in F$ t.q. $(x, u(x), \dots, u^{\dim F - 1}(x))$ est une base de F. On dit que u est cyclique s'il est E cyclique.

Exemple. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$. Soit $E = \mathbb{K}[X]/(P)$. Alors $u : E \to E$, $u(\bar{Q}) = \overline{XQ}$ est cyclique puisque $(1, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{\deg P - 1})$ est une base de E.

Proposition Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) u est cyclique
(ii) $\chi_u = \pi_u$
(iii) $\deg \pi_u = \dim E$
(iv) $\exists$ base β de E t.q. $M_\beta(u)$ est une matrice compagnon
(v) $\dim \mathbb{K}[u] = n$
(vi) u admet un unique invariant de similitude (voir plus tard)
(vii) $E \simeq \mathbb{K}[X]/(P)$
(viii) $\mathrm{Com}(u) = \{P(u) ; P \in \mathbb{K}[X]\}$

V/2 Invariants de similitude

Théorème Il existe une décomposition de E en somme directe de s.e.v u-stables non nul $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ et des polynômes unitaires non constants $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ t.q
(i) $P_k | P_{k-1} | \dots | P_1$
(ii) pour tout $i = 1, \dots, k$, u est E_i-cyclique et $\pi_{u_i} = P_i$, où $u_i = u_{|E_i} : E_i \to E_i$

Les polynômes P_i sont uniquement déterminés par la classe de similitude de u et ils la caractérisent ; ils sont appelés les invariants de similitude de u.

Preuve
Existence récurrence sur n.
dim 1 évident.
Supposons le thm est vrai pour tout e.v de dim $< n$.
Soit $x \in E$ t.q. $\pi_x = \pi_u$. Soit
$$F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x)) \quad d = \deg \pi_u$$
Si $d = \dim E$ alors $k = 1$ et $P_1 = \pi_u$

No.
Date.

Supposons $\dim F < \dim E$. On va construire un supplémentaire G de F dans E, stable par u.
Soit $e_1 = x, \ldots, e_d = u^{d-1}(x)$
Complétons $e_1, \ldots, e_d$ en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $G = H^{\perp}$, où $H = \mathrm{Vect}\{({}^t u)^i e_d^* ; i \in \mathbb{N}\}$

Lemme 1. G stable par u.
preuve Par définition H stable par ${}^t u$ et
G stable par $u \Leftrightarrow G^{\perp}$ stable par ${}^t u$.
Montrons $\Leftarrow$:
Soit $y \in G$, $\ell \in G^{\perp}$, alors $\langle u(y) | \ell \rangle = \langle y | {}^t u(\ell) \rangle = 0 \quad \forall \ell \in G^{\perp}$
$\Rightarrow$ est symétrique. □

Lemme 2 $\beta = (e_d^*, {}^t u(e_d^*), \ldots, ({}^t u)^{d-1}(e_d)^*)$ est une base de H.

Preuve Notons que $a_{ij} = \langle u^i(x) | ({}^t u)^j e_d^* \rangle = \langle u^{i+j}(x) | e_d^* \rangle = \begin{cases} 1 & i+j = d-1 \\ 0 & i+j < d-1 \end{cases}$
Alors la matrice $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,d-1}$ est inversible. Alors la famille β est libre.
Puisque $\pi_u({}^t u) = 0$, la dimension $\dim H \leq \deg \pi_u = d$. □

Lemme 3 $F \cap G = \{0\}$

Preuve. Sa resulte du fait que A est inversible (aucun vecteur non nul de F n'est pas orthogonal à H). □

Pour terminer la preuve de l'existence il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{|G} \in \mathcal{L}(G)$.

□

Rq1. On note que $P_1 = \pi_u$.

Rq.2. Il est parfois pratique d'utiliser d'abord le lemme des noyaux pour réduire au cas $\pi_u = P^d$, avec P irréductible, et ensuite appliquer la réduction de Frobenius à tel cas.

No.
Date.

<u>Unicité</u> : Supposons qu'il existe deux suites $F_1, \dots, F_r$ et $G_1, \dots, G_s$ de s.e.v u-monogènes vérifiant les conditions du thm. Notons $P_i := \pi_{(u|F_i)}$, $Q_j := \pi_{(u|G_j)}$. Si elles sont differentes notons j le premier indice pour lequel $P_j \neq Q_j$.

$P_1 = Q_1 = \pi_u$. On a

$$\begin{aligned} P_j(u)(E) &= P_j(u)(F_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(F_{j-1}) \\ &\parallel \\ P_j(u)(E) &= P_j(u)(G_1) \oplus \dots \oplus P_j(u)(G_{j-1}) \end{aligned}$$

On en déduit $\forall_{i=\{j,\dots,s\}}$ $P_j(u)(G_i) = 0$ $\Rightarrow Q_j \mid P_j$.

Par symétrie $P_j \mid Q_j \Rightarrow P_j = Q_j$ contradiction

On a donc $r = s$ et $P_i = Q_i$ pour tout i.

$\square$

<u>Corollaire (Réduction de Jordan)</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ t.q. χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors $\exists$ base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u ait la forme

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

<u>Preuve</u> Si $\pi_u = (-1)^n X^n$ alors dans la base $\mathcal{B}_1(e_1, \dots, e_n) = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ donnée par la réduction de Frobenius :

$$M_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\mathcal{B}_2 = (e_n, \dots, e_1)$

$$M_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$ réduction de Jordan

Dans le cas général, en utilisant le lemme des noyaux, on se réduit au cas $\pi_u = (X-\lambda)^d$ et on applique le cas nilpotent à $u - \lambda \mathrm{id}$.

$\square$

No.

Date.

Soit $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$.

Corollaire Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont semblables sur $\mathbb{K}$ ssi elles sont semblables sur $\mathbb{L}$.

Corollaire Une matrice et sa transposée sont semblables.

Réduction de Jordan réelle

$A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors A est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s & & & \\ & & & K_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & K_r \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

λ_ℓ valeurs propres réelles de A

$$K_\ell = \begin{pmatrix} \Lambda_\ell & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & \Lambda_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Lambda_\ell = \begin{pmatrix} a_\ell & b_\ell \\ -b_\ell & a_\ell \end{pmatrix}$$

$a_\ell \pm i b_\ell$, avec $b_\ell \neq 0$, valeurs propres complexes non-réelles.

Preuve : Par réduction de Frobenius et lemme des noyaux il suffit de considérer A t.q. $\chi_A = \pi_A = (X-\lambda)^k (X-\bar{\lambda})^k$, $\lambda = a+ib, b \neq 0$.
(c.à.d endomorphisme cyclique)

Dans ce cas on montre que la matrice K (K_ℓ plus haut) admet la même réduction de Jordan complexe que A.

Finalement, deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$ si elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

No.
Date.

VII3 . Facteurs invariants.

<u>Théorème</u> Soit A un anneau euclidien et $M \in M_{n,p}(A)$. Il existe $P \in GL_n(A)$, $Q \in Gl_p(A)$ et des éléments $d_1, .., d_s$ de A t.q.

$$M = P \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots \, d_s & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q \quad \text{et} \quad d_1 | d_2 | \cdots | d_s$$

La suite $(d_1, .., d_s)$ est unique à des inversibles près. Les $d_1, .., d_s$ sont appelés <u>facteurs invariant de la matrice M</u>

<u>Preuve</u> Algoritme (basé sur la méthode de Gauss et la division euclidienne)

<u>Etape 1</u> A l'aide de permutation sur les ligne et les colonnes on place en position (1,1) le coeficients de M de stathme minimum : $\varphi(m_{11}) \leq \varphi(m_{ij})$

<u>Etape 2</u>. s'il existe $m_{i1} \neq 0$ pour $i > 1$, ou $m_{1i} \neq 0$ pour $i \geq 1$, on le divise par m_{11},

$$m_{i1} = m_{11} q + r \qquad \varphi(r) < \varphi(m_{11}) \text{ ou } r = 0$$

On soustrat q fois la première ligne à la i-ième. $q \in A$
On obtient r à la place de m_{i1}.
Si $r \neq 0$ on revient à l'étape 1.

<u>Etape 3</u> On suppose $m_{i1} = m_{1i} = 0$ $\forall i > 1$. S'il rest un coefficient m_{ij} de M n'est pas divisible par m_{11} on ajoute la i-ième ligne à la première et on revient à Etape 2.
Sinon on recomence avec la matrice $M' = (m_{ij})_{\substack{i>1 \\ j>1}}$

L'algoritme s'arrète si $M = 0$ ou m_{11} est le seul coeff. non nul.

<u>L'unicité</u> : $d_1 = \text{pgcd}(m_{ij}, \text{ t.q. } m_{ij} \neq 0)$. $d_2/d_1, \dots, d_s/d_1$ est la suite obtenue pour $M' = \frac{1}{d_1} M$.

<u>Remarque</u> Le théorème est vrais pour les anneaux principaux. Dans la démonstration utilise l'identité de Bezout pour exprimer

$$d_1 = \text{pgcd}(m_{ij} \neq 0) = \sum q_{ij} \cdot m_{ij}$$

et on utilise les transformations élémentaires pour placer d_1 en position (1,1).

No.
Date.

Théorème Soit M la matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un e.v de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Alors les invariants de similitude de u sont les facteurs invariants différents de 1 de la matrice $M - XI \in M_n(\mathbb{K}[X])$

Preuve Il suffit de le montrer pour une matrice compagnon. $M = C(P)$

Par opérations élementaires

$$C(P) - XI = \begin{pmatrix} -X & & & -a_0 \\ 1 & -X & & -a_1 \\ & & -X & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1}-X \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \cdots + X^{n-1}L_n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & P \\ 1 & -X & & \vdots \\ & & -X & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1}-X \end{pmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + XC_1$
$\vdots$
$C_n \leftarrow C_n + XC_{n-1}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -P \\ 1 & & & \\ & \ddots & & -a_{n-2} \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & & & P \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

par permutations

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} P & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

VII.4 Calcul pratique.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & -2 \\ 3 & 12 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow A - XI_3 = \begin{bmatrix} 2-X & 4 & -1 \\ 2 & 9-X & -2 \\ 3 & 12 & -2-X \end{bmatrix}$$

$C_1 \leftrightarrow C_3$
$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2-X \\ -2 & 9-X & 2 \\ -2-X & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 + 4C_1$
$C_3 \leftarrow C_3 + (2-X)C_1$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1-X & 2X-2 \\ -2-X & 4-4X & X^2-1 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - (2-X)L_1$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2X-2 \\ 0 & 4-4X & X^2-1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 4-4X & X^2-8X+7 \end{bmatrix}$$

No.
Date.

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & X^2-8X+7 \end{bmatrix}$$

Les invariants de similitude sont $X-1$ et X^2-8X+7

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow B - I X_3 = \begin{bmatrix} 3-X & 2 & -5 \\ 2 & 6-X & -10 \\ 1 & 2 & -3-X \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3-X \\ 2 & 6-X & -10 \\ 3-X & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (3-X)L_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3-X \\ 0 & 2-X & -4+2X \\ 0 & -4+2 & 4-X^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + (3+X)C_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & -4+2X \\ 0 & -4+2X & 4-X^2 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & -4+2X \\ 0 & 0 & -(X-2)^2 \end{bmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & -(X-2)^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & (X-2)^2 \end{bmatrix}$$