No.
Date.

V Dualité

On suppose les espaces sont de dimension finie.

V.1. Espace dual. Base duale. Espace bi-dual.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On appelle dual de E l'e.v $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
Les éléments de E^* sont appelés formes linéaires

Def (base duale). Soit $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E. On définit $e_i^* \in E^*$ par

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$\mathcal{B}^* = (e_1^*, .., e_n^*)$ est une base de E^* dite base duale de $\mathcal{B}$.

Si $\varphi \in E^*$ alors $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$, c.à.d. $[\varphi]_{\mathcal{B}^*} = {}^t\left(M_{(1)}^{\mathcal{B}}(\varphi)\right)$

(1) base de $\mathbb{K}$

Proposition $\dim E = \dim E^*$. E et E^* sont isomorphes

Remarque L'isomorphisme $E \simeq E^*$ dépend du choix de base.
Il n'y a pas de choix canonique.

Déf On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}

Proposition E^{**} est canoniquement isomorphe à E.
(en dimension finie)

Preuve Notation: $x \in E$, $\varphi \in E^*$ on note $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x) \in \mathbb{K}$.
Alors $\forall_{x \in E}$ $\Phi_x(\varphi) = \langle x, \varphi \rangle$ est une forme linéaire sur E^*.

et $\Phi : E \to E^{**}$ est une application linéaire.

$\Phi_x = 0$ si $\forall_{\varphi \in E^*}$ $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$.

En effet: si $x \neq 0$ on peut compléter x en un base $\mathcal{B}_1$ de E
$\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, .., \varepsilon_n)$, $x = \varepsilon_1$, et $\exists \varphi$ t.q. $\varphi(\varepsilon_1) = 1$, $\varphi(\varepsilon_i) = 0$ si $i \neq 1$.

Alors Φ est injective, $\dim E = \dim E^* = \dim E^{**}$

Conclusion $E \simeq E^{**}$ $\square$

Rq. $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$.

No.
Date. ## V 2. Orthogonalité formes-vecteurs

Déf. Soit $A \subset E$, On note.

$$A^\perp = \{ \varphi \in E^* ; \forall_{x \in A}\ \varphi(x) = 0 \} \quad \text{orthogonal de } A$$

Pour $B \subset E^*$ $\quad B^\perp = \{ x \in E ; \forall_{\varphi \in B}\ \varphi(x) = 0 \}$ — 11 — de B

$A^\perp$ est un s.e.v de E^*, $B^\perp$ est un s.e.v de E.

Propriétés 1) Si $A_1 \subset A_2$ alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$
2) Si $A \subset E$ alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$, $A^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}\, A$

3) Si $B \subset E^*$ alors $B^\perp = (\mathrm{Vect}(B))^\perp$, $B^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}\, B$

Proposition
1) Si F est un s.e.v de E alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
2) Si G est un s.e.v de E^* alors $\dim G + \dim G^\perp = \dim E^* = \dim E$

Preuve Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F. On la complète en une base de E, $B = (e_1, \dots, e_n)$. Alors $(e_{r+1}^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $F^\perp$.

Remarque En dimension infinie l'application canonique $\Phi : E \to E^{**}$ est injective mais pas surjective. Alors, pour $G \subset E^*$ il faut distinguer $G^\perp \subset E$ et $G^\perp \subset E^{**}$.
Gourdon utilise la notation G° pour $G^\perp \subset E$.

Corollaire
1) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$.

Alors s.e.v $F = \{ x \in E ; \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_p(x) = 0 \}$ est de dimension $n - r$.

2) Réciproquement, si F est un s.e.v de E de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ t.q.
$$F = \{ x \in E ; \varphi_1(x) = \ \ = \varphi_{n-q}(x) = 0 \}.$$

Proposition
$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$$
$$(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$$
$$F_1 \subset F_2 \text{ ssi } F_1^\perp \supset F_2^\perp$$

pour F_1, F_2 s.e.v de E (ou F_1, F_2 s.e.v de E^*)

No.
Date.

V.3. Transposée d'une application linéaire

<u>Déf.</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle <u>transposée</u> de f, l'application ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ définie par

$${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

<u>Propriétés</u> 1) ${}^t({}^t f) = f$
2) ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors

$$M_{\mathcal{B}_E^*}^{\mathcal{B}_F^*}({}^t f) = {}^t\left(M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)\right)$$

<u>Preuve</u> $M_1^{\mathcal{B}_E}(\varphi \circ f) = M_1^{\mathcal{B}_F}(\varphi)\ M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$ pour $\varphi \in F^*$

On transpose $\left[{}^t f(\varphi)\right]_{\mathcal{B}_E^*} = {}^t\left(M_1^{\mathcal{B}_E}(\varphi \circ f)\right) = {}^t\left(M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)\right) \circ {}^t\left(M_{(1)}^{\mathcal{B}_F}(\varphi)\right)$

$$= {}^t\left(M_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)\right)\ [\varphi]_{\mathcal{B}_F^*}$$

□

<u>Théorème</u> (1) $\mathrm{rg}\ {}^t f = \mathrm{rg}\ f$
(2) $\mathrm{Im}\ {}^t f = (\mathrm{Ker}\ f)^\perp$
(3) $\mathrm{Ker}\ {}^t f = (\mathrm{Im}\ f)^\perp$

<u>Preuve</u> $\varphi \in (\mathrm{Ker}\ f)^\perp$ si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Ker}\ f$
c.à.d $\mathrm{Ker}\ \varphi \supset \mathrm{Ker}\ f$
Par Exercice 3 : $\Leftrightarrow$ $\exists\ \psi \in F^*$ t.q. $\psi \circ f = \varphi$
c.à.d $\varphi \in \mathrm{Im}\ {}^t f$

ça montre (2)
on montre (3) de manière similaire.

(2) $\Rightarrow$ (1) par le thm. du rang.

□

<u>Corollaire</u> 1) $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ \mathrm{Vect}$(vecteurs lignes de A).
2) $\mathrm{rg}\ A = \mathrm{rg}\ {}^t A$

No.
Date. V.4. Cas des espaces de dimension ∞.

Les cardinaux
Soient A et B deux ensembles. S'il existe une bijection $A \to B$ on dit que A et B ont même cardinal.
S'il existe une injection $A \hookrightarrow B$ (ou de manière equivalente une surjection $B \twoheadrightarrow A$) on écrit $\text{card} A \leq \text{card} B$
$\text{card} A < \text{card} B$ si $\text{card} A \leq \text{card} B$ mais il n'y a pas de bijection $A \to B$.

Notons $P(A)$ l'ensemble des parties de A.

Lemme $\text{card}\, P(A) > \text{card}\, A$

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie. Alors
$$\dim E < \dim E^* \quad (\text{et } E \not\simeq E^*)$$

Exemple $E = \mathbb{Z}_2[X]$ admet une base dénombrable $(1, X, X^2, \dots)$

Notons que : E est dénombrable (l'ensemble des parties finies d'un ensemble infini A est de même cardinalité que A)
E^* s'identifie avec $P(\mathbb{N})$ (qui n'est pas dénombrable)
$$\mathbb{N} \supset A \rightsquigarrow \varphi_A(X^n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème (Erdös-Kaplansky)
Soit E un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{K}$ avec une base indexée par un ensemble I. Alors
$$\dim(E^*) = \text{card}(\mathbb{K}^I)$$

$\mathbb{K}^I$ = l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque Si $\dim E = \infty$ alors le morphisme canonique $\Phi : E \to E^{**}$ est injectif mais pas surjectif

Remarque Si on considère un e.v normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on peut considérer le s.e.v de E^* constitué des formes linéaires continues. Il est appelé le dual topologique de E et noté E'.
par exemple si E est un espace de Hilbert alors $E' \simeq E$ de manière canonique (thm de représentation de Riesz).