No.
Date.

Ch. VIII Formes bilinéaires.

VIII 1. Généralités

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On dit qu'une application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, l'application $\varphi(x,\cdot) : y \to \varphi(x,y)$ est linéaire et si pour tout $y \in E$, l'application $\varphi(\cdot,y) : x \to \varphi(x,y)$ est linéaire.

On dit que φ est :

symétrique	si	$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$	pour tout x,y
alternée	si	$\varphi(x,x) = 0$	pour tout x
antisymétrique	si	$\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$	pour tout x,y
réflexive	si	$\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow \varphi(y,x) = 0$	

Remarques : a) antisymétrique $\Rightarrow$ alternée
b) alternée $\Rightarrow$ antisymétrique si car $K \neq 2$
c) symétrique ou antisymétrique $\Rightarrow$ réflexive

Ecriture en dimension finie

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, φ est déterminée par $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ et on a

$$\varphi(x,y) = {}^tX\,AY \qquad , \quad A = (a_{ij})$$

où $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ si $x = \sum_1^n x_i e_i$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ si $y = \sum_1^n x_i e_i$

La matrice A s'appelle la matrice de φ relativement à la base (e_i).

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases de E et soient A, resp. A', la matrice de φ rel. à la base $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{B}'$ alors

$$A' = {}^tP\,A\,P$$

où P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dit que les matrices A et A' sont congrues.

Remarque : φ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi A est symétrique resp. antisymétrique.

No.
Date.

Formes non-dégénérées.

On dit que φ est <u>non dégénérée</u> si l'application $\overline{\varphi} : E \to E^*$ définie par $\overline{\varphi}(y) = \varphi_y : E \to \mathbb{K}$

$$\varphi_y(x) = \varphi(x, y)$$

est injective c.à.d si $\operatorname{Ker} \overline{\varphi}$ est nul, où

$$\operatorname{Ker} \overline{\varphi} = \{ y \in E \mid \forall x \in E \ \ \varphi(x,y) = 0 \}$$

Par abus de langage, le s.e.v $\operatorname{Ker}\overline{\varphi}$ de E s'appelle <u>le noyau de φ</u>.

<u>Rq</u>. Cette définition n'est pas symétrique en x et y. Elle est symétrique dans deux cas suivants

1) φ est réflexive. Dans ce cas la notion du noyau est symétrique aussi.
2) $\dim E < +\infty$. Dans ce cas φ est non dégénérée ssi la matrice de φ est inversible.

Formes quadratiques

On suppose $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$.

<u>Définition</u> On appelle <u>forme quadratique</u> sur E tout application de la forme $q : E \to \mathbb{K}$

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E.

<u>Proposition</u>
Soit q une forme quadratique. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ t.q. $\forall x \in E$ $q(x) = \varphi(x,x)$. La forme s'appelle <u>la forme polaire de q</u>. Elle est définie par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y) \right]$$

<u>Déf</u>. Soit $\dim E < +\infty$. <u>Le rang de q</u> = le rang φ = le rang de la matrice de φ.

Par le théorème du rang. $\quad \operatorname{rang} \varphi = n - \dim \ker \overline{\varphi}$

No.
Date.

VIII 2. Orthogonalité. Cas général.

On va supposer que φ est réflexive.

Soit $A \subset E$ un sous ensemble. On définit

$$A^{\perp} = \{ y \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \text{ pour tout } x \in A \}$$

$A^{\perp}$ est un s.e.v de E.

Propriétés :

1) $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}\, A)^{\perp}$
2) $A \subset B \Rightarrow A^{\perp} \supset B^{\perp}$
3) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
4) Supposons $\dim E < \infty$.
Soit $B = \overline{\varphi}(A)$. Alors $A^{\perp} = B^{\perp}$ (au sens dual)

En effet, $y \in A^{\perp} \Leftrightarrow \forall_{x \in A}\ \varphi(x,y) = 0 \overset{\text{réflexivité}}{\Longleftrightarrow} \underset{x \in A}{\forall}\ \varphi(y,x) = 0 \Leftrightarrow \underset{x \in A}{\forall}\ \overline{\varphi}(x)(y) = 0$

$\Leftrightarrow y \in (\overline{\varphi}(A))^{\perp}$

Proposition Supposons $\dim E < +\infty$.
Soit F un s.e.v de E. Alors
(i) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim (F \cap \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi})$
(ii) $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi}$.

Preuve
(i) $\dim \overline{\varphi}(F) = \dim F - \dim (F \cap \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi})$
Par la propriété 4)
$\dim F^{\perp} = \dim (\overline{\varphi}(F))^{\perp} = \dim E - \dim F + \dim (F \cap \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi})$

(ii) On a $F \subset F^{\perp\perp}$ et $\mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} \subset F^{\perp\perp}$. D'où $F + \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} \subset F^{\perp\perp}$ et

$$\dim F^{\perp} + \dim F^{\perp\perp} = \dim E + \dim (F^{\perp} \cap \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi})$$
$$= \dim E + \dim \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi}$$

(puisque $\mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} \subset F^{\perp}$)

$\dim F^{\perp\perp} = \dim E - \dim F^{\perp} + \dim \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} = \dim F + \dim \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} - \dim \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi} \cap F$
$= \dim F + \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi}$

ça montre $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}\, \overline{\varphi}$

No.
Date.

Définition.
On dit que $x \in E$ est isotrope (par φ) si $\varphi(x,x)=0$.
On appelle cône isotrope de φ l'ensemble
$$C_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x,x)=0\}$$
Soit F un s.e.v de E. F est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$
F est dit totalement isotrope si $F \subset F^\perp$.

On dit que φ est anisotrope si $C_\varphi = \{0\}$.

Rq. φ anisotrope $\Rightarrow$ φ non dégénérée.

Définition On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est φ-orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts e, e' de $\mathcal{B}$, $\varphi(e,e')=0$

Théorème Soit $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$ et soit φ une forme symétrique.
Si $\dim E < +\infty$ alors il existe une base φ-orthogonale de E.

Preuve : récurrence sur $\dim E$. $\dim E = 1$ évident. Supposons vrai pour $\dim E \leq n-1$
• Si $\varphi \equiv 0$ alors toute base est orthogonale
• Si $\varphi \neq 0$ $\exists x \in E$ $\varphi(x,x) \neq 0$ [ici on utilise $\chi(\mathbb{K}) \neq 2$]. $f = \varphi(x,\cdot) \in E^*$, $f \neq 0$. Soit $H = \ker f$
Par l'hypothèse de récurrence $\exists \mathcal{B}'$ φ-orthogonale de H. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{x\}$. $\square$

Corollaire. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ symétrique. Alors $\exists P$ inversible t.q. ${}^tPAP$ soit diagonale.

Méthode de Gauss de diagonalisation d'une forme quadratique
$$q(x) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j$$

Cas 1 $\exists i$ $a_{ii} \neq 0$. Supposons $i=1$, $a = a_{11} \neq 0$.
$$q(x) = a x_1^2 + x_1 B(x_2,\dots,x_n) + C(x_2,\dots,x_n) = a\left(x_1 + \frac{B(x_2,\dots,x_n)}{2a}\right)^2 + \underbrace{\left[C(x_2,\dots,x_n) - \frac{B(x_2,\dots,x_n)^2}{4a}\right]}_{q'(x_2,\dots,x_n)}$$
et on procède par récurrence

Cas 2 $\forall i$ $a_{ii}=0$ et $\exists i,j$ $a_{ij} \neq 0$. On suppose $a = a_{12} \neq 0$
$$q(x) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3,\dots,x_n) + x_2 C(x_3,\dots,x_n) + D(x_3,\dots,x_n) =$$
$$= \frac{a}{4}\left[\left(x_1+x_2+\frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right] + \left[D - \frac{BC}{a}\right]$$

Conclusion : $q = \sum_{i=1}^{r} (l_i(x))^2$, où $l_1,\dots,l_r$ formes indépendantes de E^*
$$r = rg\, q \leq \dim E.$$

No.
Date.

VII/13. Orthogonalité. Cas non dégénéré

On suppose φ reflexive et non dégénérée et $\dim E < +\infty$

Proposition
Soit $\dim E < \infty$ et soit φ reflexive et non dégénérée. Alors φ est symétrique ou antisymétrique.

Preuve
Considerons $\overline{\varphi} : E \to E^*$ $\overline{\varphi}(y)(x) = \varphi(x,y)$ et $\overline{\Psi} : E \to E^*$, $\overline{\Psi}(x)(y) = \varphi(x,y)$

Alors par l'hypothèse $\overline{\varphi}$ et $\overline{\Psi}$ sont des isomorphismes.
Par réflexivité $\forall_x \exists \lambda_x \in \mathbb{K}^*$ $\overline{\varphi}(x) = \lambda_x \overline{\Psi}(x)$

Soit $f : E \to E$ définie par $f(x) = \overline{\Psi}^{-1}(\overline{\varphi}(x))$. Alors $\forall x$

$$f(x) = \lambda_x x$$

D'où f est une homothétie (puisque $\dim E > 1$)

$$\exists_\lambda \forall_x \quad f(x) = \lambda x$$

c.à.d $\forall_{x,y}$ $\varphi(x,y) = \overline{\varphi}(y)(x) = \overline{\Psi}(x)(y)$

$$= \lambda \overline{\Psi}(y)(x) = \lambda \varphi(y,x)$$

D'où $\lambda^2 = 1$ c.à.d $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. $\square$

Proposition Soient F, G des s.e.v de E. Alors
a) $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
b) $F^{\perp\perp} = F$
c) $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
d) $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Corollaire 1) Si F totalement isotrope $(F \subset F^\perp)$ alors $\dim F \leq \frac{1}{2} \dim E$
2) Si F est isotrope $(F \cap F^\perp \neq \{0\})$ alors $F \cap F^\perp$ est totalement isotrope.
3) Si F est non isotrope $(F \cap F^\perp = \{0\})$ alors $E = F \oplus F^\perp$. Dans ce cas on écrit

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

No.
Date.

VIII/ Classification des formes quadratiques

On dit que deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes s'il existe une application linéaire inversible h telle que $q' = q \circ h$

Si $\dim E < +\infty$
par le théorème d'existence d'une base φ-orthogonale (où φ est la forme polaire de q) toute forme de rang r est équivalente à

$$\sum_{i=1}^{r} c_i x_i^2 \quad , \quad c_i \neq 0$$

Alors :
(i) Si $\mathbb{K}$ est quadratiquement clos (tout élément admet une racine carrée) alors deux formes sont équivalentes ssi elles sont de même rang
(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors deux formes sont équivalentes ssi elles ont même rang et même signature (loi d'inertie de Sylvester)

(iii) Si car $\mathbb{K} = p > 2$ alors toute forme quadratique non-dégénérée est équivalente à $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + a x_n^2$
$a = \operatorname{disc} q \in \mathbb{K}^{*}/(\mathbb{K}^*)^2$

Alors il y a exactement 2 classes d'équivalence.
(iv) Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ il y a une infinité de formes quadratiques 2-à-2 non équivalentes (déjà si $\dim E = 1$).

No.
Date.

Constructions algorithmiques d'une base φ-orthogonale.

1). Par la méthode de Gauss.

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i (l_i(x))^2$, l_i formes linéaires indépendantes alors. Soit L la matrice dont les lignes sont l_i. Alors les colonnes de L^{-1} formes une base q-orthonogonale.

$$A = {}^tLDL \Rightarrow D = ({}^tL)^{-1} A L^{-1} \quad \text{où } D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

Rq. si $\mathrm{rg}\, q < n$ on complète les formes en une base de E^* et on choisit $d_i = 0$ pour $i > \mathrm{rg}\, q$.

2) Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

On note $\langle x, y\rangle = \varphi(x,y)$. on suppose que la forme est <u>anisotrope</u>.

$v_1 = e_1$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1$$

$\dots\dots\dots$

$$v_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, e_n\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$$

<u>Exemple</u> (pour une forme hermitienne)

$$|x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x}_1 x_2 - i x_1 \bar{x}_2 + 2i x_2 \bar{x}_3 - 2i \bar{x}_2 x_3 = q(x)$$

$$= \|x_1 + ix_2\|^2 + 2\|x_2 - ix_3\|^2 + 4\|x_3\|^2$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= e_1 \\ v_2 &= e_2 - \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = e_2 - ie_1 = (-i, 1, 0) \\ v_3 &= e_3 - \frac{\langle v_1, e_3\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, e_3\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = (1, i, 1) \end{aligned}\right\} \text{Les colonnes de } L^{-1}.$$