No.
Date.

IX. Formes hermitiennes

Définition
Soient E, F deux $\mathbb{C}$-e.v. On dit que
$$\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$$
est une forme sesquilinéaire si $\forall x \in E$, $\varphi(x, \cdot) : F \to \mathbb{C}$ est linéaire et si $\forall y \in F$, $\varphi(\cdot, y) : E \to \mathbb{C}$ est antilinéaire c.à.d, $\overline{\varphi(\cdot, y)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Désormais on suppose $E = F$ et $\dim E < +\infty$.

Ecriture en coordonnée.
Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
Soit $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Alors
$$\varphi(x, y) = {}^t\overline{X} A Y = \sum_{i,j} \overline{x_i} y_j \varphi(e_i, e_j)$$

Changement de base $\quad M' = {}^t\overline{P} M P.$

Définition
On dit qu'une forme sesquilinéaire φ est hermitienne si $\forall (x, y)$
$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$

Prop. φ est hermitienne ssi sa matrice A satisfait $A^* = A$
où on note $A^* = {}^t\overline{A}$.

Forme quadratiques hermitiennes
On dit $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique hermitienne s'il existe une forme sequilinéaire φ t.q.
$$q(x) = \varphi(x, x)$$

Proposition Pour une forme quadratique hermitienne q $\exists ! \varphi$ hermitienne t.q. $\quad q(x) = \varphi(x, x)$
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) + i\, q(x - iy) - i\, q(x + iy)\right)$$

Proposition Il existe toujours une base q- (ou φ) orthogonale.

Corollaire Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Alors il existe une matrice inversible P t.q.
$P^* A P$ soit diagonale à coeff réelles.

Rq: On peut choisir $P \in U(n)$.

No.
Date.

Théorème spectrale.

Cas complexe.

Soit E un espace hermitien (de dimension finie) et soit $u : E \to E$ un operateur auto-adjoint (c.à.d. $\forall_{x,y \in E}$ $\langle ux, y\rangle = \langle x, uy\rangle$). Alors

1) toute valeur propre de u est réelle.
2) u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve

1) Soit x un vecteur propre de u, $u(x) = \lambda x$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} \langle ux, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \\ \quad \| \\ \langle x, ux\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \quad \text{c.à.d } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) **Lemme** Si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

Preuve Soit $y \in F^\perp$ alors pour tout $x \in F$

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0 \quad \Rightarrow u(y) \in F^\perp \qquad \square$$

On démontre (2) par récurrence sur $\dim E$. Cas $\dim E = 1$ trivial.
Supposons il est vrai pour les espaces de dim $< n$.

Soit x un vecteur propre de u. Alors $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.
On applique l'hypothèse de réc à la restriction $u|_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp$
($F^\perp$ stable par u par le lemme).
Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormé de $F^\perp$ dans laquelle u' est diagonale.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale pour $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$

$\square$

Cas réel.

Soit E un espace euclidien de dimension finie, et soit $u : E \to E$ auto-adjoint
Alors

1) toute valeur propre de u est réelle
2) u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve Même preuve. On a besoin juste d'un lemme.

Lemme Si u est auto-adjoint alors u admet une valeur propre réelle.

Preuve I (par complexification)

Soit $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée de E. La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ est symétrique donc hermitienne. Soit $u_c : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme associé à A. Il est autoadjoint. Par le cas complexe $\mathrm{spec}(A) \subset \mathbb{R}$.

$\square$

No.
Date.

Preuve II Soit $f(x) := \langle Ax, x \rangle$, $g(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

$f|_{g^{-1}(1)}$ admet un maximum x_0 (la sphere $g^{-1}(1)$ est compacte, f est continue)

Par Lagrange multipliers $\exists \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{grad}(f - \lambda g)(x_0) = 0 \qquad (*)$$

On calcule $\operatorname{grad} f(x) = 2Ax$, $\operatorname{grad} g(x) = 2x$. Alors $(*)$ donne

$$2Ax_0 - \lambda 2 x_0 = 0 \implies Ax_0 = \lambda x_0.$$

$\square$