

Cours II.

Polynômes d'endomorphismes.

Soit $\varphi: E \rightarrow E$ un endomorphisme et soit $Q \in K[X]$ un polynôme

$$Q(X) = a_m X^m + \dots + a_1 X + a_0$$

Alors on définit un endomorphisme $Q(\varphi): E \rightarrow E$ par

$$Q(\varphi) = a_m \varphi^m + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}_E$$

où $\varphi^i = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ i -fois

Remarques

1. Si $\text{Mat}_B(\varphi) = A$ alors $\text{Mat}_B Q(\varphi) = Q(A)$

2. Si $P, Q \in K[X]$ alors $P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi)$ *Très important voir la dernière page pour la preuve*

Définition On dit que $Q \in K[X]$ est un polynôme annulateur de φ si $Q(\varphi) = 0$.

Proposition 1. Si Q est un polynôme annulateur de φ alors

$$\underline{\text{Sp}(\varphi) \subset \text{Racines}(Q)}$$

Preuve

Soit $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$. $v \neq 0$ un vecteur propre t.q. $\varphi(v) = \lambda v$.

Soit $Q(X) = \sum a_i X^i$. Alors :

$$0 = Q(\varphi)(v) = \sum a_i \varphi^i(v) = \sum a_i \lambda^i v = Q(\lambda) v \implies Q(\lambda) = 0 \quad \square$$

Thm. (Cayley-Hamilton)

$$P_\varphi(\varphi) = 0$$

c.à.d. endomorphisme nul

Exemple: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$P_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a+d)X + (ad+bc)$$

Alors

$$A^2 - (a+d)A + (ad+bc)I_2 = 0$$

Application Si $P_A = (-1)^n (X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i)$ alors

$$A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$$

On sait que $a_0 = \det A$. Si $\det A \neq 0$ alors on a

$$A^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^i = -a_0 I_n \Rightarrow A \left(A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1} A^i \right) = -a_0 I_n$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = -a_0^{-1} \left(A^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1} A^i \right)}$$

Preuve du thm. Cayley-Hamilton. pour φ trigonalisable

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base t.q. $\text{Mat}_\beta(\varphi) = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

c.à.d. $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i + \sum_{j < i} a_{ji} e_j$

Alors $P_\varphi(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$. Considérons

$$g_i(\varphi) = (\lambda_1 \text{id} - \varphi) \cdots (\lambda_i \text{id} - \varphi)$$

Nous allons montrer par récurrence sur i que $\boxed{g_i(e_j) = 0 \text{ pour } j \leq i} \quad (*)$

Cas $i=1$: $g_1(e_1) = \lambda_1 e_1 - \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_1 = 0$.

$i-1 \Rightarrow i$: On note que $g_i = g_{i-1} \circ (\lambda_i \text{id} - \varphi) = (\lambda_i \text{id} - \varphi) \circ g_{i-1}$. Alors:

$$\text{pour } j < i: g_i(e_j) = (\lambda_i \text{id} - \varphi) \circ g_{i-1}(e_j) = 0$$

pour e_i : $g_i(e_i) = g_{i-1} \circ (\lambda_i \text{id} - \varphi)(e_i) = g_{i-1} \left(\sum_{j < i} a_{ji} e_j \right) = 0$. . se montre $(*)$.

En particulier, par $(*)$, $P_\varphi(\varphi) e_j = g_n(e_j) = 0$ pour tout j .

Se termine la démonstration du thm Cayley-Hamilton

□

Cor. $P_A(A) = 0$ pour toute $A \in M_n(K)$, si $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}
(pour toute matrice A , trigonalisable ou pas)

Preuve. $K = \mathbb{C}$: Toute matrice carrée sur \mathbb{C} est trigonalisable. Alors le corollaire résulte directement du thm. Cayley-Hamilton
si $K = \mathbb{R}$. $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ et P_A est le même sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
Alors par le cas $K = \mathbb{C}$ on a $P_A(A) = 0$. \square

Considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$h: K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

($\mathcal{L}(E)$ = les endomorphismes de E) défini par $h(Q) = Q(\varphi)$.

L'ensemble des polynômes annulant φ est le noyau de h .

C'est donc un idéal de $K[X]$. Il est alors principal, engendré par un unique polynôme unitaire.

On appelle le polynôme minimal de φ On le note $m_\varphi(X)$.

Remarque:

1) Les polynômes annulateurs de φ sont du type

$$Q(X) = S(X) m_\varphi(X) \quad \text{avec } S(X) \in K[X]$$

2) Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

$$m_\varphi \mid P_\varphi$$

Exemples.

A	P_A	m_A	} vérifier le
$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$(\lambda - X)^2$	$X - \lambda$	
$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$(\lambda - X)^2$	$(X - \lambda)^2$	

Proposition 2: Racines (P_φ) = Racines (m_φ)

Preuve On a $Sp(\varphi) = \text{Racines}(P_\varphi)$.

Par Proposition 1. $Sp(\varphi) \subset \text{Racines}(m_\varphi)$.

Alors $\text{Racines}(P_\varphi) = Sp(\varphi) \subset \text{Racines}(m_\varphi)$

Par Remarque 2: $m_\varphi \mid P_\varphi \Rightarrow \text{Racines}(m_\varphi) \subset \text{Racines}(P_\varphi)$

□

Recherche du polynôme minimal:

Si $P_\varphi(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\alpha_k}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\sum \alpha_i = n$, $\alpha_i > 0$
alors $m_\varphi(x) = (x - \lambda_1)^{\beta_1} \cdots (x - \lambda_k)^{\beta_k}$, $0 < \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i .

Par exemple, si $P_\varphi(x) = (x-1)^2(x-2)$ alors

$m_\varphi(x) = (x-1)(x-2)$ ou $m_\varphi(x) = (x-1)^2(x-2) = P_\varphi(x)$

Théorème

Un endomorphisme φ est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire (condition suffisante de diagonalisabilité)

Si le polynôme caractéristique $P_\varphi(x)$ est scindé à racines simples alors φ est diagonalisable.

(On n'a pas si et seulement si !!!)

page supplémentaire

- Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et P, Q deux polynômes alors
les endomorphismes $P(\varphi)$ et $Q(\varphi)$ commutent :

C'est important et pas difficile.

Considérons une matrice $A \in M_n(K)$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i, \quad Q(X) = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j.$$

Alors

$$P(A)Q(A) = \left(\sum_i a_i A^i \right) \left(\sum_j b_j A^j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j A^i A^j =$$

$$(a_i b_j = b_j a_i, \text{ puisque } a_i, b_j \in K, \text{ et } A^i A^j = A^{i+j} = A^j A^i !)$$

$$= \sum_{i,j} b_j a_i A^{i+j} = \sum_j \sum_i b_j a_i A^j A^i =$$

$$= \left(\sum_j b_j A^j \right) \left(\sum_i a_i A^i \right) = Q(A)P(A)$$