

Cours III

Lemme des noyaux

Notation : L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Lemme des noyaux

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et soit $Q(X) = Q_1(X) \cdots Q_k(X)$ un polynôme factorisé en produit de polynômes 2-à-2 premiers entre eux. Alors

$$\underline{\ker Q(\varphi) = \ker Q_1(\varphi) \oplus \cdots \oplus \ker Q_k(\varphi)}$$

En particulier, si Q est un polynôme annulateur de φ alors

$$E = \ker Q_1(\varphi) \oplus \cdots \oplus \ker Q_k(\varphi)$$

Exemples

1) Projecteurs : On dit que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p \circ p = p$. Alors $p^2 - p = 0$, c.à.d. $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de p . Par le lemme des noyaux

$$\underline{E = \ker \varphi \oplus \ker(\varphi - \text{id}) = E_0 \oplus E_1}$$

et $\text{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$ (ça signifie que p a comme valeurs propres soit 0 et 1, soit seulement 1 si $p = \text{id}_E$, soit seulement 0 si p est l'endomorphisme nul).

2) Symétries: $s \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $s \circ s = \text{id}_E$

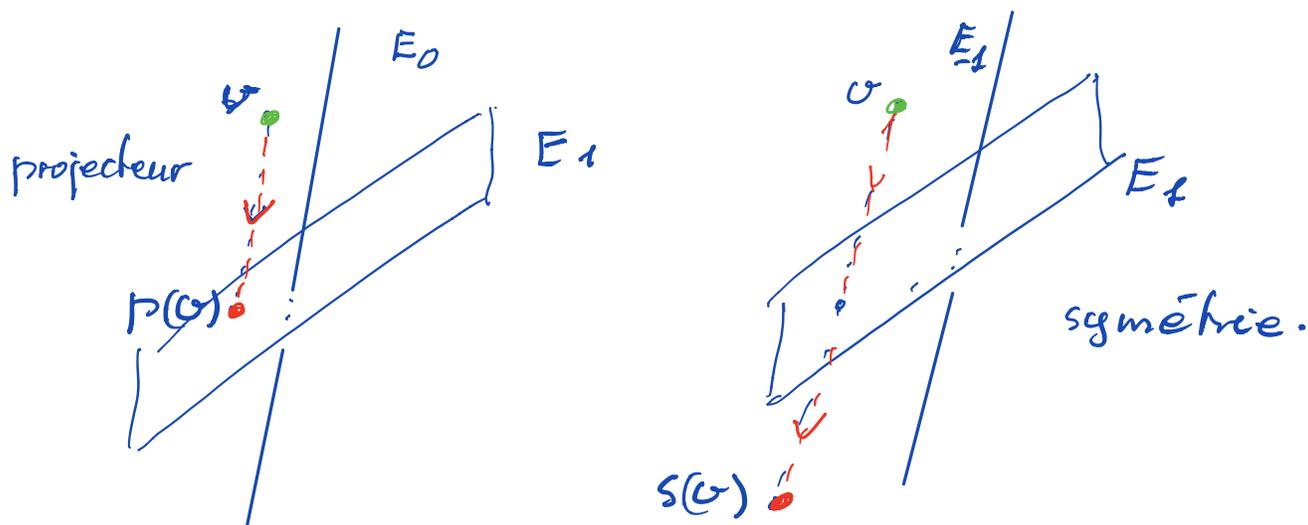
Alors $Q(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur et

$$E = \ker(\varphi - \text{id}) \oplus \ker(\varphi + \text{id}) = \boxed{E_1 \oplus E_{-1}}$$

et $\text{Sp}(\varphi) \subset \{1, -1\}$

(sous l'hypothèse que $X-1$ et $X+1$ sont premiers entre eux ce qui est équivalent à $1 \neq -1$.)

Vrai pour $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q} \dots$, mais pas pour $\mathbb{F}_2 = \text{le corps à 2 éléments}$)



3). Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \text{Sp}(V)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

Alors $X - \lambda_i, i=1, \dots, k$ sont 2-à-2 premiers entre eux

Soit $Q(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$. Alors

$$\ker Q(\varphi) = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

(on dit que les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants)

Si Q est un polynôme annulateur alors

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

Lemme des noyaux - Preuve

Réurrence sur k . $k=1$ évident.

Cas crucial: $k=2$.

Puisque $Q_1 + Q_2 = 1$ par le thm. de Bézout $\exists U_1, U_2 \in K[X] + \mathfrak{q}$

$$U_1 Q_1 + U_2 Q_2 = 1$$

d'où $U_1(\varphi) Q_1(\varphi) + U_2(\varphi) Q_2(\varphi) = \text{id}$. et $\forall \sigma \in E$

$$\boxed{\sigma = U_1(\varphi) Q_1(\varphi) (\sigma) + U_2(\varphi) Q_2(\varphi) (\sigma)} \quad (*)$$

On doit montrer que : 1) $\ker Q_1(\varphi) \cap \ker Q_2(\varphi) = \{0\}$

2) $\ker Q(\varphi) \supset \ker Q_1(\varphi) + \ker Q_2(\varphi)$

3) $\ker Q(\varphi) \subset \ker Q_1(\varphi) + \ker Q_2(\varphi)$

1) Si $\sigma \in \ker Q_1(\varphi) \cap \ker Q_2(\varphi)$ alors, d'après (*),

$$\underline{\sigma} = \underbrace{U_1(\varphi) Q_1(\varphi) (\sigma)}_{=0} + \underbrace{U_2(\varphi) Q_2(\varphi) (\sigma)}_{=0} = \underline{0}$$

2) Si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_i \in \ker Q_i(\varphi)$, alors

$$Q(\varphi) (\sigma) = Q(\varphi) (\sigma_1) + Q(\varphi) (\sigma_2) = \underbrace{Q_2(\varphi) Q_1(\varphi) (\sigma_1)}_{=0} + \underbrace{Q_1(\varphi) Q_2(\varphi) (\sigma_2)}_{=0} = 0$$

et $\sigma \in \ker Q(\varphi)$.

3) On suppose que $\sigma \in \ker Q(\varphi)$

Par (*) $\sigma = \underbrace{U_1(\varphi) Q_1(\varphi) (\sigma)}_{\sigma_1} + \underbrace{U_2(\varphi) Q_2(\varphi) (\sigma)}_{\sigma_2}$

On montre que $\sigma_1 \in \ker Q_1(\varphi)$ et $\sigma_2 \in \ker Q_2(\varphi)$

$$Q_1(\varphi)(\sigma_1) = Q_1(\varphi) \mathcal{U}_2(\varphi) Q_2(\varphi)(\sigma) = \mathcal{U}_2(\varphi) \underbrace{Q_1(\varphi) Q_2(\varphi)(\sigma)}_{= Q(\varphi)(\sigma) = 0} = 0$$

(Important : on utilise que les polynômes en φ commutent).

De même $Q_2(\varphi) \sigma_2 = 0$.

Alors $\sigma = \sigma_2 + \sigma_1 \in \ker Q_1(\varphi) + \ker Q_2(\varphi)$.

Cas général : $Q = \underbrace{Q_1 \cdots Q_{k-1}}_{:= Q^*} Q_k$

On applique l'hypothèse de récurrence à $Q^* = Q_1 \cdots Q_{k-1}$
et le cas $k=2$ à $Q = Q^* \cdot Q_k$.

* _____ *

Corollaire :

Un endomorphisme φ est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Preuve

' \Rightarrow ' φ diagonalisable \Rightarrow m_φ scindé à racines simples.

Si $A = \text{Mat}_p(\varphi) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ alors $m_\varphi = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$

En effet, m_φ divise $P_\varphi = \pm t \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{d_i}$, $d_i > 0$.
et toute racine de P_φ est racine de m_φ .

Alors m_φ est de la forme $\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, $0 < \beta_i \leq d_i$.

On vérifie par récurrence sur k que

$$\prod_{i=1}^k (A - \lambda_i I_n) = 0.$$

Je vous le laisse comme exercice.

(\Leftarrow) supposons $m_\varphi = Q(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)$ scindé à racines
simples. Par lemme des noyaux

$$E = \bigoplus_i E_{\lambda_i} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$$

puisque $\ker(\varphi - \lambda_i \text{id}) = E_{\lambda_i}$. Donc φ est diagonalisable.

× ————— ×

Thm: (Réduction en bloc)

Soit $P_\varphi = (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$. Alors

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_k}, \text{ où } N_{\lambda_i} := \ker(\varphi - \lambda_i \text{id})^{d_i}$$

On dit que N_i est l'espace caractéristique de φ associée à la valeur propre λ_i .

Preuve

Se résulte immédiatement du lemme des noyaux appliqué au P_φ et du thm Cayley-Hamilton.