Corrigé TD 4

Ex 1

1. $\sigma_1 = (1423)(23)(143)$

$\sigma_1(1) = 2$ $\quad \sigma_1(3) = 4$

$\sigma_1(2) = 1$ $\quad \sigma_1(4) = 3$

d'où : $\sigma_1 = (12)(34) = (34)(12)$

ordre de $\sigma_1 = 2$

$\varepsilon(\sigma_1) = \varepsilon(12)\,\varepsilon(34) = (-1)(-1) = 1$

2. $\sigma_2 = (15)(234)(51)(12345)(423)(135)$

$\sigma_2(1) = 5$ $\quad \sigma_2(3) = 1$ $\quad \sigma_2(4) = 4$

$\sigma_2(5) = 3$ $\quad \sigma_2(2) = 2$ $\quad \sigma_2(6) = 6$

d'où $\sigma_2 = (153)$

ordre de $\sigma_2 = 3$

$\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^2 = 1$

<u>Rappel</u> :
pour un cycle d'ordre k
$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

Ex2

1. $(a_1 a_2 \cdots a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_2)$

il suffit de calculer l'image de chaque a_i

$a_i \mapsto a_{i+1}$ pour $i < k$ et

c'est pareil à gauche et à droite

2. $(a_i a_j) = (1 a_i)(1 a_j)(1 a_i)$

évident

d'après (1) S_n est engendré par les transpositions, car tout cycle est produit de transpositions.
d'après (2) toute transposition est produit de transpositions de la forme $(1a)$ avec $2 \leq a \leq n$.

Ex 3 **1.** Il faut montrer la relation

$$\sigma(a_1 a_2 \cdots a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n)).$$

Appelons ψ la permutation de gauche. Alors on calcule.

$$\psi(\sigma(a_i)) = \sigma(a_1 a_2 \cdots a_n)\sigma^{-1}(\sigma(a_i))$$

$$= \sigma(a_1 a_2 \cdots a_n)(a_i)$$

$$= \begin{cases} \sigma(a_1) & \text{si } i = n. \\ \sigma(a_{i+1}) & \text{si } i < n \end{cases}$$

si $x \notin \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)\}$ alors $\sigma^{-1}(x) \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$.

$$\psi(x) = \sigma(a_1 a_2 \cdots a_n)\sigma^{-1}(x)$$

$$= \sigma\sigma^{-1}(x)$$

$$= x$$

Donc ψ coïncide avec la permutation donnée.
par le cycle de longueur n

$$\psi = (a_1 a_2 \cdots a_n).$$

2. On cherche à déterminer les permutations. (3

$\sigma \in S_n$ vérifiant

$$\sigma(12) = (12)\sigma. \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sigma(12)\sigma^{-1} = (12)$$

D'après (1), on sait que $\sigma(12)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\,\sigma(2))$

La relation $(*)$ devient donc.

$$(\sigma(1)\,\sigma(2)) = (12) \qquad (**)$$

il y a donc 2 cas.

1) $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(2) = 2$, c'est-à-dire.

$$\sigma \in \underbrace{S_{n-2}}_{\text{permutations de } \{3,4,\dots,n\}} \subset S_n$$

2) $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$, c'est-à-dire.

$$\sigma = (12)\cdot\psi \text{ avec } \psi \in \underbrace{S_{n-2}}_{\text{permutations de } \{3,4,\dots,n\}} \subset S_n.$$

- Le nombre de ces permutations est égal à

$$\underbrace{(n-2)!}_{\text{pour (1)}} + \underbrace{(n-2)!}_{\text{pour (2)}} = 2(n-2)!$$

- Oui, cet ensemble est un sous-groupe, car stable par multiplication et passage à l'inverse.

3. Supposons $n \geq 3$. D'après (2) on sait que.
si $\sigma \in$ centre de S_n, $\sigma(ab) = (ab)\sigma$
implique que $\begin{cases} \sigma(a) = a \text{ et } \sigma(b) = b \\ \text{ou} \\ \sigma(a) = b \text{ et } \sigma(b) = a. \end{cases}$ (1)

Si l'on considère une autre transposition (ac)
$c \neq b$, on a $\sigma(ac) = (ac)\sigma$, ce qui
implique que $\begin{cases} \sigma(a) = a \text{ et } \sigma(c) = c \\ \text{ou} \\ \sigma(a) = c \text{ et } \sigma(c) = a. \end{cases}$ (2)

La seule possibilité d'avoir (1) et (2) est donc.
$\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b$, $\sigma(c) = c$.
On fait ce raisonnement avec n'importe quel triplet $\{a, b, c\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ et on déduit que

$$\sigma = Id_{\{1,2,\dots,n\}}.$$

Si $n = 2$, le centre de S_2 est S_2, car S_2 abélien.

Ex 4

1. D'après un résultat du cours toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme produit de cycles à support disjoints. Ces cycles commutent entre eux.

$$\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdots c_k.$$

Si chaque cycle c_i a un ordre a_i alors l'ordre de σ est ppcm $(a_1, \dots, a_k)$.

Ainsi si l'ordre de $\sigma = 2 = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_k)$
on déduit que $a_i = 2$ pour tout i.
Donc σ est produit de transpositions à supports disjoints.

2. n impair $n \geq 3$ et $\sigma^2 = Id$. D'après (1), σ est produit de ~~cycles~~ transpositions à support disjoints. Donc le nombre d'éléments i tel que $\sigma(i) \neq i$ est pair (= réunion disjointe des supports). Donc il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) = i$.

Ex 5 D'après le cours, on sait que A_n est engendré par les produits d'un nombre pair de transpositions. Il suffit donc de montrer que le produit de 2 transpositions est (produit de) cycles de longueur 3.

$(ab)(bc) = (abc)$ $\quad a \neq b \quad b \neq c \quad a \neq c$

$(ab)(cd) = (acb)(acd)$ $\quad a, b, c, d$ 4 éléments distincts.

Examen 3

Question 13 $\sigma = (1423)(25)(143)$

On calcule $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(5) = 3$
$\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$

On obtient donc que

$\sigma = (12534)$ Réponse : (e)

Question 15 D'après l'exercice 4(2) une permutation d'ordre 2 de S_4 est nécessairement produit de transpositions de supports disjoints.

Il y a donc 2 cas :

1) 1 transposition, 6 permutations :
(12), (13), (14), (23), (24) et (34)

2) 2 transpositions à supports disjoints, 3 perm.
(12)(34), (13)(24) et (14)(23).

Il y a donc 9 permutations d'ordre 2.

Réponse : (c)

Question 16

(a) vrai, voir cours

(b) vrai, exercice 3 TD 4

(c) vrai, exercice 5 TD 4

(d) faux, (12) et (23) sont d'ordre 2, mais $(12)(23) = (123)$ est d'ordre 3

(e) vrai, voir cours

Réponse : (d)