K = corps (commutatif)
$K[X]$ = ann. des poly. en X
$K[X]$: ann. principal

$M \in \mathcal{M}_{r,r}(K)$ la matrice carrée d'ordre r à coeff dans K définit $K^r \longrightarrow K^r$ de manière standard

Le polynome caractéristique de M est $\mathrm{car}(M)(X) = \det(M - X\,\mathrm{Id}) \in K[X]$
Le polynome minimal de M est le générateur de $\ker\left(\begin{array}{l} K[X] \to \mathrm{End}(K^r) \\ P \longmapsto P(M) \end{array}\right)$

Thm (Caley-Hamilton)
$\mathrm{car}(M)$ est un polynome annulateur de M
$\mathrm{polymin}(M) \mid \mathrm{car}(M)$

soit $M \in \mathcal{M}_{r,r}(K) \subset \mathcal{M}_{r,r}(K[X])$
on peut donc définir l'application $K[X]$-linéaire Φ donnée par : $K[X]^r \xrightarrow[\Phi]{M - X\mathrm{Id}} K[X]^r$

Prop
ϕ est injective et $\mathrm{coker}\,\Phi = K[X]^r / \phi(K[X]^r)$ est un $K[X]$-module
si on note $V = \mathrm{coker}\,\Phi$, on a une suite exacte $0 \longrightarrow K[X]^r \xrightarrow{\phi} K[X]^r \xrightarrow{p} V \longrightarrow 0$
et : i) V est un K-ev de dim r
ii) V est un $K[X]$-module où X opère sur V comme la matrice $M \in \mathcal{M}_{r,r}(K)$ dans la base $\{\bar{e}_i\}_i = \{p(e_i)\}_i$ de V où $\{e_i\}$ base can de $K[X]$ comme $K[X]$-module

Preuve :
① ϕ est injective :
soit $(Q_1, \dots, Q_r) \in K[X]^r$ dans $\ker \phi$
ie $\phi(Q_1, \dots, Q_r) = (0, \dots, 0)$

$$(M - X\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $\forall i \quad \sum_{j=1}^{r} m_{ij} Q_j - X Q_i = 0$
si, par l'absurde, $(Q_1, \dots, Q_r) \neq (0, \dots, 0)$, on choisit l'indice i_0 tq $Q_{i_0} \neq 0$
et $\deg(Q_{i_0})$ est maximal.

$$\underbrace{\sum_i m_{i_0 j} Q_j}_{\deg \leq \deg Q_{i_0}} = \underbrace{X Q_{i_0}}_{\deg = 1 + \deg Q_{i_0}} \neq 0 \quad \text{contradiction}$$

Donc $(Q_1, \dots, Q_r) = (0, \dots, 0)$

② notons $V = \mathrm{coker}(\phi)$, On a donc une suite exacte $0 \to K[X]^r \xrightarrow{\phi} K[X]^r \xrightarrow[\text{surj}]{p} V \longrightarrow 0$
on note e_i la base canonique de $K[X]^r$ comme $K[X]$-module
on note $\bar{e}_i = p(e_i)\ \forall i$
on sait que V est un K-e.v
comme p est surjectif la famille $\{\bar{e}_i\}$ est aussi génératrice dans V (comme $K[X]$-module)
on montre alors que $\{\bar{e}_i\}$ est libre en tant que famille de vecteur du K-ev V
par l'absurde, supposons que $\{\bar{e}_i\}$ n'est pas K-libre
alors $\exists \lambda_i \in K$ tq $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \bar{e}_i = 0$ dans V
$\Leftrightarrow \sum_i \lambda_i e_i \in \mathrm{Im}\,\phi$ car suite exacte
$\Leftrightarrow \exists (Q_1, \dots, Q_r) \in K[X]^r$ tq $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (M - X\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_r \end{pmatrix}$

$\forall i \quad -\lambda_i + \sum_{j=1}^{r} m_{ij} Q_j - X Q_i = 0$

Comme avant, par l'abs si $(Q_1, \dots, Q_r) \neq (0, \dots, 0)$, on choisit i_0 tq $Q_{i_0} \neq 0$ et $\deg(Q_{i_0})$ est max
on a : $-\lambda_i + \sum m_{i_0 j} Q_j = X Q_{i_0} \neq 0$ ABSURDE

X opère comme M car $\forall i$ on sait $(M - X\mathrm{Id})\, e_i \in \mathrm{Im}\,\phi$

$Me_i - Xe_i \in \mathrm{Im}\,\phi \in K[X]^r$

Donc si on prend l'image par p on obtient $p(Me_i - Xe_i) = 0 \iff M\bar{e}_i - X\bar{e}_i = 0$

$\iff M\bar{e}_i = X\bar{e}_i \quad \forall i$

Cela montre aussi que la famille $\{\bar{e}_i\}$ est génératrice du K-ev V.

$M\bar{e}_i = X\bar{e}_i \Rightarrow X\bar{e}_i \in \mathrm{vect}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r) = V$ et $X^k \cdot \bar{e}_i \in \mathrm{vect}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r) = V$

$\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ est une famille $K[X]$-génératrice de V

$\forall v \in V \quad \exists P_1, \dots, P_r \in K[X] \quad P_1 \bar{e}_1 + \dots + P_r \bar{e}_r = v$

On considère V comme $K[X]$ module, où X opère comme M sur V

D'après le thm de str de $K[X]$-modules, il existe des $P_1, \dots, P_s \in K[X]$ avec $P_1 | \dots | P_s$ tq
$V = K[X]/(P_1) \times \dots \times K[X]/(P_s)$ car la matrice $M - X\mathrm{Id}$ est éq à la matrice $\mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & P_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & P_s \end{pmatrix} = D$

Rmq :
- Les facteurs de similitude de M sont par déf les facteurs inv de $M - X\mathrm{Id} \in \mathcal{M}_{r,r}(K[X])$
- M_1 semblable à $M_2 \iff M_1$ et M_2 ont mêmes facteurs de similitude
- P_s = poly min
  $P_1 \dots P_2$ = poly carac.
  et $P_s | P_1 \dots P_s$ on retrouve Caley-Hamilton.