Examen du 2 mai 2023

1. **(3 points)** On considère l'application

$$\phi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (a_1, a_2) \mapsto \frac{1}{9}a_1 - \frac{7}{15}a_2.$$

   (a) Montrer que ϕ est une application $\mathbb{Z}$-linéaire entre deux $\mathbb{Z}$-modules.
   (b) Est-ce que ϕ est surjectif ?
   (c) Donner une $\mathbb{Z}$-base du noyau $\ker(\phi)$.
   (d) Déterminer un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathrm{im}(\phi) = r\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. **(1,5 points)** On considère les sous-ensembles suivants de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$

$$E_1 = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \equiv 0\ [3] \text{ et } P'(0) \equiv 0\ [6]\},$$

$$E_2 = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \equiv 0\ [6] \text{ et } P'(1) \equiv 0\ [6]\},$$

$$E_3 = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \equiv 0\ [3] \text{ et } P(1) = P'(1)\},$$

   où P' désigne la dérivée de P. Parmi ces 3 sous-ensembles lesquels sont des idéaux de $\mathbb{Z}[X]$? Justifier.

3. **(1 points)** Est-ce que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2-4)$ a des diviseurs de zéro ? Si oui, donner un exemple.

4. **(1,5 points)** On considère les idéaux $I = (17, X-2)$ et $J = (18, X-3)$ de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$. Déterminer si ces idéaux sont maximaux. Dans le cas contraire, donner un idéal qui le contient strictement.

5. **(5 points)** On considère le sous-ensemble $\mathbb{D}$ de $\mathbb{Q}$ donné par les nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres rationnels qui ont un développement décimal fini. Par exemple $\frac{1}{10} \in \mathbb{D}$ et $0,12345 \in \mathbb{D}$, mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Q}$.
   (b) On condidère l'application $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Q}$ donné par $P \mapsto P(\frac{1}{10})$.
      i. Montrer que f est $\mathbb{Z}$-linéaire.
      ii. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \mathbb{D}$.
      iii. Montrer que $\ker(f) = (10X-1)$.
      iv. En déduire qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{Z}$-linéaire

$$\overline{f} : \mathbb{Z}[X]/(10X-1) \to \mathbb{D}.$$

   (c) Est-ce que $\mathbb{D}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini ?

6. **(2 points)** On considère la matrice M à coefficients réels donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer les facteurs de similitude de M.
   (b) Donner le polynôme minimal de M.
   (c) Est-ce que M est diagonalisable ?

7. **(6 points)** On considère le polynôme $P = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Soit L le corps de décomposition de P dans $\mathbb{C}$.
   (a) Ecrire les racines de P en fonction de $\sqrt[4]{2}$ et i.
   (b) Montrer que $i \in L$.
   (c) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
   (d) Déterminer le polynôme minimal de i sur $\mathbb{Q}$ ainsi que sur $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.
   (e) Déduire que $[L : \mathbb{Q}] = 8$.
   (f) En identifiant $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$ à un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ donner la liste des éléments de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$.
   (g) Soit H l'unique sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$. Décrire le sous-corps K de L associé à H via la correpondance de Galois. Est-ce que l'extension $\mathbb{Q} \subset K$ est galoisienne ?

Corrigé de l'examen du 2 mai 2023

1. On a $\Phi(a_1, a_2) = \frac{1}{45}(5a_1 - 21a_2)$

(a) On a $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{Z}^2$

$\Phi(\lambda . a) = \lambda \Phi(a)$ $\quad \forall a \in \mathbb{Z}^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{Z}$

(b) Non, par exemple $\frac{1}{46} \notin \mathrm{im}(\Phi)$.

(c) $(21, 5)\mathbb{Z} = \ker(\Phi)$. donc $\ker(\Phi)$ admet comme base $\{(21, 5)\}$.

(d) $r = \frac{1}{45}$. Il est clair que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \frac{1}{45}\mathbb{Z}$.

Inversément, comme $PGCD(5, 21) = 1$, on peut trouver des entiers a_1, a_2 tel que

$$5a_1 - 21a_2 = 1. \quad \text{(identité de Bézout)}$$

donc $\frac{1}{45} \in \mathrm{Im}(\Phi)$, donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \frac{1}{45}\mathbb{Z}$.

2. Aucun des 3 sous-ensembles n'est un idéal.

3. $(\bar{X}-2)(\bar{X}+2) = 0$ donc $\bar{X}-2$ et $\bar{X}+2$ sont des diviseurs de zéro.

4. . $I = (17, X-2)$ est un idéal maximal car $\mathbb{Z}[X]/I = \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ est un corps.

. $J = (18, X-3)$ n'est pas un idéal maximal car $\mathbb{Z}[X]/J = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

On a par exemple.

$\mathcal{J} \subset (2, X-3)$ ou $(9, X-3)$ ou $(6, X-3)$

$\boxed{5.}$ (a) $\mathbb{D}$ est stable par + et par multiplication par un entier.

(b) (i) f est $\mathbb{Z}$-linéaire, car $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$
et $f(\lambda . P) = \lambda f(P)$

$\forall P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$.

(ii) Il est clair que $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{D}$. Si $x \in \mathbb{D}$, alors on peut écrire $x = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$

avec $a_i \in \{0, \dots, 9\}$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$
les a_i sont les chiffres de x après la virgule dans le développement décimal de x
si on prend $P = n + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$.
on a $P(\frac{1}{10}) = x$, donc $\mathbb{D} \subset \mathrm{im}(f)$.
d'où $\mathrm{im}(f) = \mathbb{D}$.

(iii) Il est clair que $(10X-1) \subset \ker(f)$.
Inversément si $P \in \ker(f)$, alors $P(\frac{1}{10}) = 0$
donc P est divisible par $X - \frac{1}{10}$ dans $\mathbb{Q}[X]$

Quitte à diviser P par son contenu, on peut supposer $c(P) = 1$.
On a l'égalité dans $\mathbb{Q}[X]$.

$$P = (X - \tfrac{1}{10}) \cdot Q \quad \text{avec } Q \in \mathbb{Q}[X].$$

On multiplie avec $10d$, $d = \mathrm{ppcm}(\text{dénominateurs de } Q)$

$$d10P = (10X-1) \cdot Qd$$

Alors on a $dQ \in \mathbb{Z}[X]$ et.

$$10d\, c(P) = 10d = c(10X-1) \cdot c(dQ) = c(dQ)$$

en utilisant la multiplicativité du contenu d'un polynôme. Donc $c(dQ) = 10d$

donc $dQ = 10d \cdot Q'$ avec $Q' \in \mathbb{Z}[X]$.

donc $P = (10X-1)Q' \Rightarrow P \in (10X-1)$

d'où l'égalité $(10X-1) = \ker(f)$.

(iv) Comme $\mathrm{im}(f) = \mathbb{D}$ et $\ker(f) = (10X-1)$ on obtient le résultat en appliquant le résultat général qui dit qu'on a un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[X]/\ker(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f).$$

(c) Non, $\mathbb{D}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Supposons par l'absurde que $\mathbb{D}$ est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{D}$. Chaque x_i correspond à un polynôme $P_i \in \mathbb{Z}[X]$. (les P_i ne sont pas uniques)

choisissons un entier $N > \deg P_i \quad \forall i$

Alors $\frac{1}{10^N} \notin \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$, mais $\frac{1}{10^N} \in \mathbb{D}$.

contradiction.

$\boxed{6.}$ (a) facteurs de similitude $(1, (X-3)^2)$

(b) polynôme minimal $(X-3)^2$

(c) M n'est pas diagonalisable, car $\ker(M - 3Id) \neq \mathbb{R}^2$

7. (a) Les 4 racines de P sont $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{2}\,i$, $\underset{-\sqrt[4]{2}}{\underset{\shortparallel}{\sqrt[4]{2}\,i^2}}$, $\underset{-\sqrt[4]{2}\,i}{\underset{\shortparallel}{\sqrt[4]{2}\,i^3}}$

(b) $i = \dfrac{\sqrt[4]{2}\,i}{\sqrt[4]{2}} \in L$

(c) P n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$, car $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}$

et P n'est pas de la forme

$$X^4 - 2 = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d) = P_1 \cdot P_2$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

Comme $P_i \in \mathbb{Q}[X]$ les racines de P_i sont complexes conjuguées. les couples de racines complexes conjuguées sont $i\sqrt[4]{2}$ et $-i\sqrt[4]{2}$, mais $X^2 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[X]$.

(d) $P_{\min, i, \mathbb{Q}} = X^2 + 1$, $P_{\min, i, \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})} = X^2 + 1$

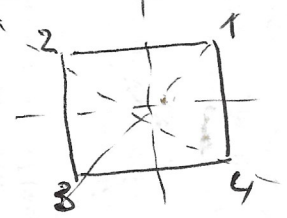
(e) On a $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ et $[\underset{L}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)}} : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] = 2$

donc $[L : \mathbb{Q}] = 4 \times 2 = 8$

(f) $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L) \subset S_4$

On observe que $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(L)$ est le groupe diédral D_8

$$D_8 = \{(id), \underset{\sigma}{\underset{\shortparallel}{(1234)}}, \underset{\sigma^2}{(13)(24)}, \underset{\sigma^3}{(1432)}, (24), (13), (12)(34), (14)(23)\}$$



= groupes des isométries d'un carré.

(g) $K = \mathbb{Q}(i)$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i)$ est une extension galoisienne car $H \triangleleft D_8$

H est un sous-groupe <u>distingué</u> dans D_8

$H = \{id, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$