M1 Algèbre
Année 2022-2023

Université Côte d'Azur

Examen partiel du 28 mars 2023

1. **(14 points)** On considère le nombre complexe

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

et l'application

$$\Phi : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \Phi(P) = P(\omega).$$

On notera

$$E = \mathrm{im}(\Phi) \subset \mathbb{C}.$$

Ici $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'anneau des polynômes en une variable X et à coefficients entiers.

(a) Est-ce que l'application Φ est un homomorphisme de groupes ?

(b) Est-ce que l'application Φ est un homomorphisme d'anneaux ?

(c) Montrer que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ vérifie $P(\omega) = 0$, alors $P(\overline{\omega}) = 0$, où $\overline{\omega}$ désigne le conjugué complexe de ω.

(d) Donner un polynôme $P_{min} \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré 2 tel que $P_{min} \in \ker(\Phi)$. Dans la suite on admettra que $\ker(\Phi)$ est un idéal principal engendré par P_{min}.

(e) Exprimer E comme un quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ par un idéal.

(f) Est-ce que E est un anneau intègre ?

(g) Dessiner dans le plan complexe l'intersection

$$E_1 = E \cap D(0,1)$$

où $D(0,1)$ est le disque fermé (=avec bord) de centre 0 et de rayon 1.

(h) Est-ce que E_1 est un sous-groupe de E ?

(i) Déterminer les éléments inversibles de E.

(j) Montrer que E est un anneau euclidien. On pourra adapter la preuve (vue en TD) pour l'anneau de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

2. **(6 points)** On considère le sous-ensemble I de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$

$$I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(0) \equiv 0\ [6] \text{ et } P'(0) \equiv 0\ [3]\},$$

où P' désigne la dérivée de P.

(a) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I$ est fini. Décrire le groupe abélien fini sous-jacent.

(c) Donner un diviseur de zéro dans l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I$.

Corrigé de l'examen partiel du 30 mars 2023

Question 1 .

(a) Φ est un homomorphisme de groupes, car.

$\forall P, P' \in \mathbb{Z}[X]$

$$\Phi(P+P') = \Phi(P) + \Phi(P')$$

$$\Leftrightarrow (P+P')(\omega) = P(\omega) + P'(\omega).$$

(b) Φ est un homomorphisme d'anneaux, car.
Φ homomorphisme de groupes (voir (a)) et

$\forall P, P' \in \mathbb{Z}[X]$ $\quad \Phi(P \cdot P') = \Phi(P) \cdot \Phi(P')$

$$\Leftrightarrow (P \cdot P')(\omega) = P(\omega) \cdot P'(\omega).$$

(c) Comme $P \in \mathbb{Z}[X]$ les coefficients de P sont invariants par conjugaison complexe, donc

$$\overline{P(\omega)} = P(\overline{\omega}) = 0$$

(d) Si $P(\omega) = 0$, alors $(X-\omega)$ divise P dans $\mathbb{C}[X]$.
si $P(\overline{\omega}) = 0$, alors $(X-\overline{\omega})$ divise P dans $\mathbb{C}[X]$.

donc si $P \in \ker \Phi$, on a $(X-\omega)(X-\overline{\omega})$ divise P.

or $(X-\omega)(X-\overline{\omega}) = X^2 + X + 1. \in \mathbb{Z}[X]$

donc $P_{min} = X^2 + X + 1.$

(e) $E = \mathbb{Z}[X] / (P_{min})$

(f) E est intègre, car $E \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ est un corps, donc intègre.

(g) On remarque que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, donc $\omega^2 = -\omega - 1$

Donc tout élément de E peut s'écrire de la forme $a + b\omega + c\omega^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

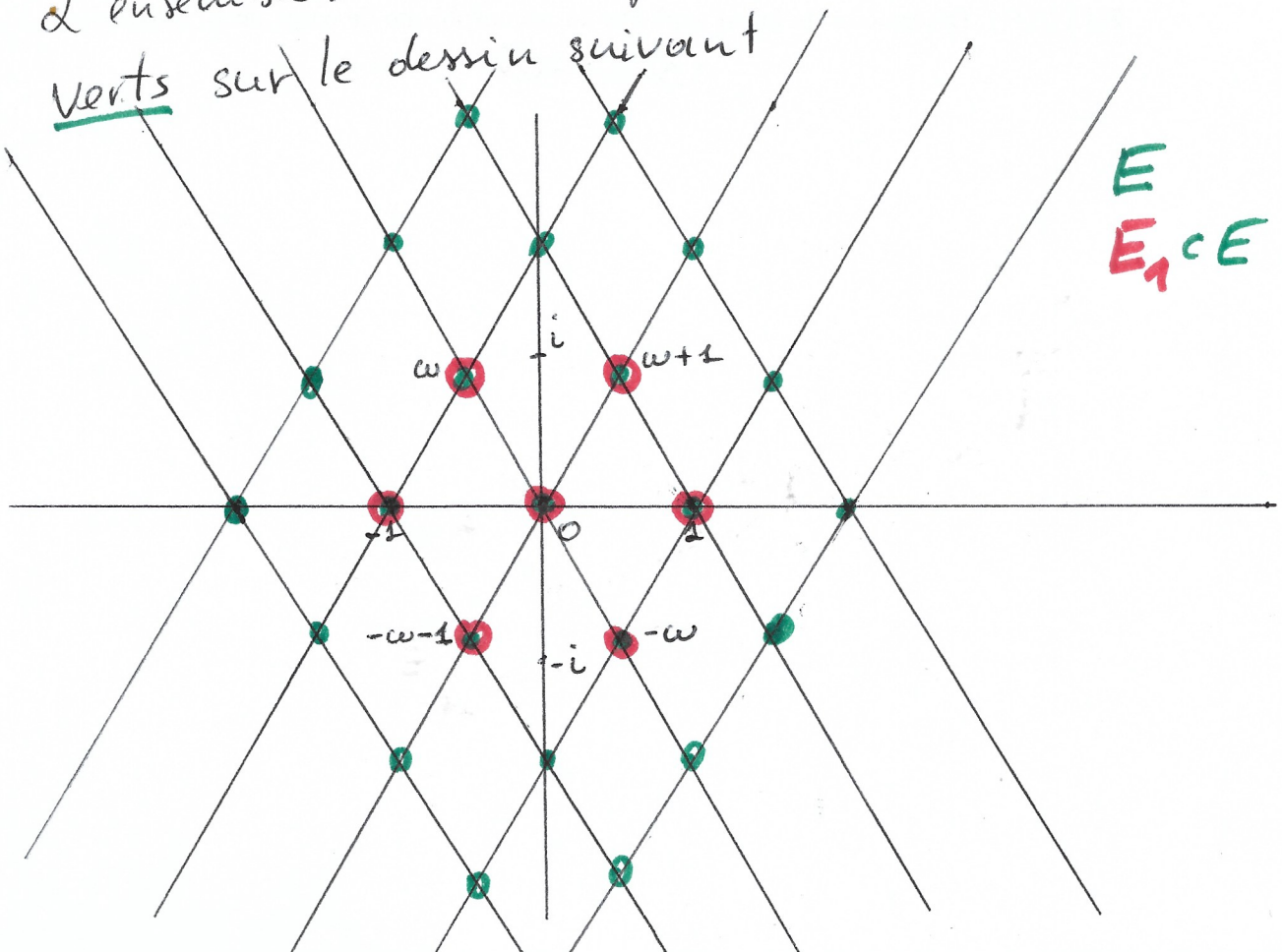
$$= a + b\omega + c(-\omega - 1)$$

$$= \underbrace{(a-c)}_{=\alpha} + \underbrace{(b-c)}_{=\beta}\omega$$

Donc tout élément de E est de la forme

$$\alpha + \beta\omega \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble $E \subset \mathbb{C}$ correspond donc aux points verts sur le dessin suivant



Les points de E_1 correspondent aux points rouges.

$$E_1 = \{0, \omega, 1, -1, \omega+1, -\omega, -\omega-1\}$$

(h) E_1 n'est pas un sous-groupe de E, car E_1 n'est pas stable par l'addition $1+1=2 \notin E_1$.

(i) Si $e \in E$ est inversible, alors il existe $e' \in E$ tel que $e \cdot e' = 1$.
Si on prend la norme complexe, on obtient

$$|e| \cdot |e'| = 1.$$

Si $|e| > 1$, alors $|e'| < 1$, or le seul élément $e' \in E$ vérifiant $|e'| < 1$ est $e' = 0$, ce qui est exclus. Donc $|e| = 1$.
d'où $E^* = \{1, -1, \omega, \omega+1, -\omega, -\omega-1\}$.

(j) Il suffit de montrer que pour tout $e \in E$ et tout $f \in E$, $f \neq 0$, il existe q et $r \in E$ vérifiant

$$e = q \cdot f + r. \quad \text{avec } |r| < |f|.$$

En divisant par f, on obtient

$$\left| \frac{e}{f} - q \right| = \left| \frac{r}{f} \right| < 1.$$

Il suffit donc de montrer que $\forall e, f \in E$ il existe $q \in E$ à une distance < 1 de $\frac{e}{f} \in \mathbb{C}$

Ceci est clair, si on considère le pavage de $\mathbb{C}$ par des triangles équilatéraux dont les sommets sont les éléments de E p.ex le triangle $(0, 1, \omega+1)$ ou $(0, 1, -\omega)$. Tout $z \in \mathbb{C}$ est dans un de ces triangles de côté 1, donc à une distance < 1 d'un de ses sommets.

Question 2

(a) Si $P \in I$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors.

$$(PQ)(0) = P(0) \cdot Q(0) \equiv 0 \quad [6] \quad , \text{ car } P(0) \equiv 0 \quad [6].$$

$$\begin{aligned}(PQ)'(0) &= P'(0) \cdot Q(0) + P(0) Q'(0) \\ &\equiv 0 \cdot \overline{Q(0)} + 0 \cdot \overline{Q'(0)} \mod 3 \\ &\equiv 0 \mod 3\end{aligned}$$

car $P(0) \equiv 0 \, [6] \Rightarrow P(0) \equiv 0 \, [3]$.

(b) On considère l'application $\mathbb{Z}$-linéaire (en fait homomorphisme d'anneaux)

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{Z}[X] &\longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}. \\ P &\longmapsto (P(0) \bmod 6, P'(0) \bmod 3)\end{aligned}$$

Alors Φ est surjectif et $\operatorname{Ker} \Phi = I$.

donc $\mathbb{Z}[X]/I = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(c) $(\bar{0}, \bar{1}) \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un diviseur de zéro.

car $(\bar{0}, \bar{1}) = \Phi(x)$

et $(\bar{0}, \bar{1}) \cdot (\bar{0}, \bar{1}) = \Phi(x) \cdot \Phi(x) = \Phi(x^2) = (\bar{0}, \bar{0})$.