3. Quelques démonstrations de la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Les démonstrations de cette formule que nous venons de donner par les séries de Fourier ne sont ni les plus anciennes, ni les plus élémentaires.

3.1. D'abord voici comment Euler a *découvert* la valeur $\frac{\pi^2}{6}$; il ne s'agit pas d'une démonstration, mais d'une intuition géniale qui rendait le résultat tout au moins plausible. La série entière

$$\frac{sinx}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

a pour racines les nombres $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, donc en posant $y = x^2$, les racines de l'équation

$$0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{y^n}{(2n+1)!} + \cdots \tag{3.16}$$

sont $y = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$ Or si le second membre de (3.16) était un polynôme, la somme des inverses des racines serait égale à l'opposé du coefficient de y. Faisons comme s'il en allait de même pour l'équation (3.16), dont le second membre est une série entière, non un polynôme ; on aurait

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Bien entendu Euler a ensuite *démontré* rigoureusement la formule, mais n'était-il pas plus important de l'avoir *trouvée* ?

On peut aussi chercher des démonstrations les plus *élémentaires* possibles, ce qui ne veut pas forcément dire les plus simples, en essayant d'être au niveau d'un cours de première année d'Université, ce qui n'est pas le cas des séries de Fourier. Nous allons en indiquer quelques-unes.

3.2. La démonstration qu'on va lire, sans doute l'une des plus élémentaires possibles, est due à I.Papadimitriou, un mathématicien amateur grec, qui l'a envoyée à la rédaction de l'American Math.Monthly en 1973 [73].

Appliquons les inégalités valables pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$cotg^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + cotg^2\theta$$

aux valeurs $\theta = \theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, où n est un entier ≥ 1 et $k = 1, 2, \ldots, n$, et faisons la somme :

$$\sum_{k=1}^{n} cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < n + \sum_{k=1}^{n} cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1}. \tag{3.17}$$

On va prouver que

$$(3.18)\qquad \sum_{k=1}^{n} cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Dès lors il suffira de multiplier (3.17) par $\frac{\pi^2}{4n^2}$ et de faire tendre n vers l'infini pour obtenir la formule d'Euler (3.7).

Pour démontrer (3.18) considérons le polynôme de degré n

$$P_n(x) = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} \mp \cdots$$

On va voir que *les n racines de P_n sont les $x_k = cotg^2\theta_k = cotg^2 \frac{k\pi}{2n+1}$* pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On saura alors que la somme de ces racines vaut

$$\binom{2n+1}{3} : \binom{2n+1}{1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

d'où (3.18).

Pour trouver les racines de P_n, partons de la formule de Moivre

$$cos(m\theta) + isin(m\theta) = sin^m\theta(cotg\theta + i)^m = sin^m\theta \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k cotg^{m-k}\theta$$

donc pour m entier ≥ 1,

$$sin(m\theta) = sin^m\theta\Big[\binom{m}{1}cotg^{m-1}\theta - \binom{m}{3}cotg^{m-3}\theta + \binom{m}{5}cotg^{m-5}\theta \mp \cdots\Big],$$

soit, pour $m = 2n+1$,

$$sin[(2n+1)\theta] = sin^{2n+1}\theta P_n(cotg^2\theta).$$

Pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $sin^{2n+1}\theta \neq 0$. Les nombres $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, annulent le premier membre, ce qui prouve bien que les $x_k = cotg^2\theta_k$ sont les racines (distinctes) de P_n. □

Exercice 4

Utilisez les mêmes ingrédients pour prouver que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. □

3.3. Voici une autre démonstration "élémentaire", quoiqu'un peu moins que la précédente ; elle est due à E.L.Stark en 1969 [90]. Soit à calculer $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Considérons le *noyau de Fejer :*

$$F_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)cos(kx) = \frac{1}{n+1}\frac{sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{sin^2\frac{x}{2}}, \tag{3.19}$$

et estimons de deux façons l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} xF_n(x)dx$.

Vu que

$$\int_0^{\pi} xcos(kx)dx = -\frac{1}{k^2} + (-1)^k\frac{1}{k^2},$$

on a d'abord

$$I_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1}\Big[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\Big]$$

donc

$$I_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2} + O(\frac{Logn}{n}). \tag{3.20}$$

Puis, comme $sin\frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi}$ pour $0 \leq x \leq \pi$, on a aussi

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &\leq \frac{\pi^2}{2(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{2(n+1)}\int_0^{\frac{(n+1)\pi}{2}} sin^2 t\frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{\pi^2}{2(n+1)}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{(n+1)\pi}{2}}\frac{dt}{t}\Big] = O\Big(\frac{Logn}{n}\Big), \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty}(I_n) = 0$. Faisons tendre n vers l'infini dans (3.20) ; il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \\ &= 2\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}\Bigg) = 2(s - \frac{s}{4}) = \frac{3s}{2}, \end{aligned}$$

donc $s = \dfrac{\pi^2}{6}$. □

Exercice 5

Prouvez (3.19).

Exercice 6 (autre démonstration "élémentaire" de (3.7), d'après Y.Matsuoka en 1961 [65].)

On pose $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$J_n = \frac{2.4.6.\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n-1)} \int_0^{\pi/2} t^2 cos^{2n} t dt.$$

1°) En intégrant deux fois par parties l'intégrale de Wallis :

$$\int_0^{\pi/2} cos^{2n} t dt = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6.\dots(2n)} \frac{\pi}{2},$$

montrez que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$J_n - J_{n-1} = -\frac{\pi}{4}\frac{1}{n^2}$$

et donc que

$$J_n = \frac{\pi}{4}\Big(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Big).$$

2°) Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$.

4. La fonction dilogarithme

Etudiée par Euler et Landen vers 1760, c'est la fonction, notée $x \mapsto Li(x)$, définie pour $-1 \leq x \leq 1$ par

$$Li(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \cdots \tag{3.21}$$

La formule d'Euler (3.7) s'écrit $Li(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

En intégrant le développement en série entière de rayon de convergence un,

$$-\frac{Log(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} + \dots + \frac{t^{n-1}}{n} + \cdots,$$

on voit que, pour $-1 < x < 1$,

$$Li(x) = -\int_0^x \frac{Log(1-t)}{t} dt = \int_0^x \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{du}{1-u}, \tag{3.22}$$

cette dernière formule expliquant la terminologie "dilogarithme" ; la formule (3.22) a un sens pour $-\infty < x < 1$ et permet donc de prolonger la définition de Li à cet intervalle, et aussi pour $x = 1$, grâce à (3.21), par continuité.

Ainsi, sur $-\infty < x \leq 1$, Li est la *fonction continue qui s'annule pour* $x = 0$ *et a pour dérivée sur* $-\infty < x < 1$ *la fonction* $-\dfrac{Log(1-x)}{x}$.

Pour $0 < x < 1$ on a l'équation fonctionnelle

$$(3.23) \qquad Li(x) + Li(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - Log(1-x)Logx.$$

En effet les deux membres ont la même dérivée $-\dfrac{Log(1-x)}{x} + \dfrac{Logx}{1-x}$ et, quand $x > 0$ tend vers 0, ils tendent vers la même constante $\dfrac{\pi^2}{6}$, vu que $Log(1-x) \sim -x$ et $xLogx$ tend vers 0.

En particulier, pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient la belle formule, due à Euler,

$$(3.24) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}Log^2 2,$$

où on note $(Logx)^2 = Log^2 x$.

Sur (3.21) il est immédiat que, pour $-1 \leq x \leq 1$,

$$(3.25) \qquad Li(x) + Li(-x) = \frac{1}{2}Li(x^2),$$

d'où notamment

$$Li(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Pour $-\infty < x < 1$, on a aussi la relation

$$(3.26) \qquad Li(x) + Li\Big(\frac{x}{x-1}\Big) = -\frac{1}{2}Log^2(1-x),$$

car les deux membres ont la même dérivée $\dfrac{1}{1-x}Log(1-x)$, et s'annulent tous deux pour $x = 0$. En combinant (3.25) et (3.26), il vient :

$$(3.27) \qquad Li\Big(\frac{x}{x-1}\Big) + \frac{1}{2}Li(x^2) - Li(-x) = -\frac{1}{2}Log^2(1-x)$$

pour $-1 \leq x < 1$. Dans cette relation il est intéressant de faire $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, car alors $\dfrac{x}{x-1} = x^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et d'y joindre la relation obtenue en faisant $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ dans (3.23) ; on obtient ainsi les deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}Li\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big) - Li\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) = -\dfrac{1}{2}Log^2\Big(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\Big) \\ Li\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big) + Li\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) = \dfrac{\pi^2}{6} - Log\Big(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\Big)Log\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) \end{cases}$$

dont la résolution fournit les sommes des deux séries :

$$Li\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-\sqrt{5})^n}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{15} - \frac{1}{4}Log^2\Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big) \tag{3.28}$$

et

$$Li\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{10} - Log^2\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big). \tag{3.29}$$

Exercice 7

Calculez $Li\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)$. □

Exercice 8.

1°) Montrez que, pour $0 < x < 1$,

$$Li(x) - Li(-x) + Li\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) - Li\Big(\frac{x-1}{1+x}\Big) = \frac{\pi^2}{4} + Log x Log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big).$$

2°) Déduisez-en les formules :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}Log^2(\sqrt{2}-1)$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{5}-2)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{3}{4}Log^2\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big). \ \square$$

Le lecteur intéressé par la fonction "dilogarithme" et ses généralisations pourra consulter le livre de Lewin [61]

5. Comportement asymptotique de la moyenne de certaines fonctions arithmétiques

Au Chapitre I,3, nous avons déjà traité cette question pour la fonction $r(n)$, nombre de décompositions de l'entier n en somme de deux carrés, et pour la fonction $d(n)$, nombre de diviseurs de n. Grâce à la formule d'Euler $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, nous sommes en mesure de la résoudre pour trois autres fonctions arithmétiques : la fonction somme des diviseurs, la fonction indicatrice d'Euler, et la valeur absolue de la fonction de Möbius.

5.1. La fonction somme des diviseurs

Pour tout entier $n \geq 1$, posons :

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \text{ la somme des diviseurs de } n.$$