Algèbre L 1, Interro 1 , durée 25' , Septembre 2015

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 – On considère le système de 4 équations à 4 inconnues à coefficients réels :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 3 & (E_2) \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_3) \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 4 & (E_4). \end{array}\right.$$

1) Préciser la première variable, la deuxième, la troisième et la quatrième variable de ce système ? Quelles sont les ordres des quatre équations ? Trianguler ce système **en suivant avec précision l'algorithme de Gauss**. Quelles sont la ou les variables libres du système triangulé obtenu ?
2) Résoudre E en paramètrant ses solutions à l'aide des variables libres obtenues ci-dessus.
3) Expliciter deux solutions de E. Donner le système homogène associé à E et ses solutions.

Correction : 1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. Le système E est ordonné, car les quatre équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & (E_2 - E_1) \\ & & & & & & x_4 & = & -1 & (E_3 - E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_4 - 3E_1) \quad . \end{array}\right.$$

Les équations de ce systèmpe sont d'ordre respectivement 1,2,4 et 2. Ce système n'est pas ordonné. Il a même solution que le système ordonné :

$$(E'')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & (E_2 - E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_4 - 3E_1) \\ & & & & & & x_4 & = & -1 & (E_3 - E_1) \quad . \end{array}\right.$$

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la deuxième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E''')\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & (E_2 - E_1) \\ & & & & & & x_4 & = & -1 & (E_3''' = (E_4 - 3E_1) - (E_2 - E_1)) \\ & & & & & & x_4 & = & -1 & (E_4''' = E_3 - E_1) \quad . \end{array}\right.$$

Ce système est ordonné.

Étape 3 Elle consiste à utiliser la troisième équation du système E''' pour faire monter l'ordre des suivantes ; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons la troisième équation du système E''' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E'''')\quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 & & (E_2 - E_1) \\ & & & & & & x_4 & = & -1 & & (E_3''' = (E_4 - 3E_1) - (E_2 - E_1)) \end{array}\right. .$$

Ce sytème est triangulé et l'algorithme est terminé.

Les variables de tête des 3 équations de E'''' sont respectivement x_1, x_2 et x_4. Ce système E'''' admet donc x_3 comme seule variable libre.

2) En remontant les équations de ce système triangulé, nous obtenons :

$$2x_2 = 2 - x_3 + 2x_4 = -x_3 \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_3 .$$

Puis :

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - x_4 + 1 \quad x_1 = 2 + \frac{5}{2}x_3 .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(2 + \frac{5}{2}x_3, -\frac{1}{2}x_3, x_3, -1) \quad \text{tels que} \quad x_3 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(2, 0, 0, -1) + x_3(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0) \quad \text{tels que} \quad x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

3) Chaque que nous fixons une valeur de x_3 nous obtenons uen solution de E. Par exemple en fixant $x_3 = 0$, puis $x_3 = 1$, nous obtenons que les quadruplets de réels :

$$(2, 0, 0, -1) \quad \text{et} \quad (\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1)$$

sont deux solutions de E.

3) Par définition, le système dit homogène associé à E est E_h :

$$(E_h)\quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Soit S_h l ensemble des solutions de E_h. Nous déduisons de la question précédente :

$$S_h = \{x_3(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0) \quad \text{tels que} \quad x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Remarque Pour vérifier ses calculs, le lecteur vérifiera que $(2, 0, 0, -1)$ est bien solution de E et que $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$ est solution du système homogène associé à E_h.