On considère le système de 4 équations à 4 inconnues à coefficients réels :

$$(F)\quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (F_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 & (F_2) \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 4 & (F_3) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 2 & (F_4). \end{array}\right.$$

1) Résoudre ce système en utilisant avec précision les algorithmes de triangulation et de résolution des systèmes triangulés. On précisera les variables libres du système triangulé intermédiaire.
2) Expliciter trois solutions de (F).
3) Quelles sont les solutions du système linéaire homogène associé à F.
4) Déduire de la question 1 l'ensemble des solutions (x_1, x_2, x_3, x_4) de F telles que $x_2 = 1$.

Solution : 1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. Le système F est ordonné, car les quatre équations du système sont d'ordre 1. Triangulons notre système en utilisant l'algorithme de Gauss:

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système F pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : on simplifie , on stoppe ou on ordonne. Utilisons donc la première équation du système F pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (F_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (F_2' = F_2 - 2F_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (F_3' = F_3 - 4F_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (F_4' = F_4 - 2F_1) \end{array}\right. .$$

Supprimons l'équation $0 = 0$. Notre système a même solution que :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (F_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (F_2' = F_2 - 2F_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (F_3' = F_3 - 4F_1) \end{array}\right. .$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Utisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la suivante :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (F_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (F_2' = F_2 - 2F_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (F_3'' = F_3' - F_2') \end{array}\right. .$$

Supprimons l'équation $0 = 0$. Notre système a même solution que :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables de tête sont x_1 et x_2. Les variables libres sont x_3 etx_4.

Remontons les équations du système triangulé pour déterminer ses solutions notées S. Nous obtenons respectivement :

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \ , \\ x_1 & = & 1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \quad . \end{array}$$

il en résulte :

$$S = \{(1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(1,0,0,0) + x_3(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

2) Chaque choix d'un couple (x_3, x_4) donne une solution de notre système. Si nous prenons $(x_3, x_4) = (0,0)$, nous obtenons que $(1,0,0,0)$ est une solution. Si nous prenons $(x_3, x_4) = (1,1)$, nous obtenons une deuxième solution : $(0,0,1,1)$. Si nous prenons $(x_3, x_4) = (1,0)$, nous obtenons une troisième solution : $(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$, etc.

3) Les solutions du système homogène associé à F sont :

$$\{x_3(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3 6, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

4) Ceux sont les éléments de S tels que $\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 1$. Soit $x_3 = 3 + x_4$. Soit Σ l'ensemble des solutions de F telles que $x_2 = 1$, nous obtenons :

$$\Sigma = \{(3 - x_4, 1, x_4 + 3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$\Sigma = \{(3,1,3,0) + x_4(-1,0,1,1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$