Exercices Corrigés
Premières notions sur les espaces vectoriels

Exercice 1 – On considére le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

1) En résolvant ce système suivant l'algorithme du cours, donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2) Soit $u = (-4, -1, 3, 3)$ et $v = (-3, -3, 6, 3)$. Montrer que u et v appartiennent à F. Quelles sont les coordonnées de u et v dans la base déterminée à la question 1. En déduire que (u, v) est une base de F.

Exercice 2 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
1) Montrer en utilisant la définition que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est une base de E. Pourquoi aurait-il été suffisant de montrer que la famille $(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ était libre ou génératrice ?
2) Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1}.
En déduire les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 3 – On considére le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Déterminer une base de F.

Exercice 4 – Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de base (e_1, e_2). On pose $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$.
1) Montrer par deux méthodes que la famille (u_1, u_2) est une base.
2) Exprimer par deux métodes e_1, puis e_2 comme une combinaison linéaire de u_1, u_2.
3) Si un vecteur u de E a pour coordonnées (A, B) dans la base (u_1, u_2), quelles sont les coordonnées (a, b) de u dans la base (e_1, e_2) et inversement ?

Exercice 5 – On considére le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

et le sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(**)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array}\right. .$$

Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 6 – (extrait partiel novembre 2011) On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. .$$

On note P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E).

1) Préciser en utilisant l'algorithme de résolution une base $\mathcal{B}$ de P.
2) Vérifier que les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (0, 3, 0, 4)$ appartiennent à P.
3) Déterminer les coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$ déterminée dans 1).
4) Montrer que (u, v) est une base de P.

On considère le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right. .$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E').
5) Montrer que $P \bigcap F = \{0\}$.
6) Déterminer une base de F.
7) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, montrer qu'il existe $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in P$ et $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4) \in F$ tel que $x = x' + x''$. On déterminera x' et x''.

Correction de l'exercice ?? :
1) F est constitué des solutions d'un système homogène à coefficients réels de deux équations à quatre inconnues. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. F est encore formé des solutions du système homogène :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 & (E_2 - E_1) \end{array} \right. .$$

qui est un système triangulé de variables libres x_3 et x_4. On obtient :

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \quad .$$

On obtient alors :

$$x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \quad .$$

Il en résulte :

$$F = \{(\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

$$F = \{x_3(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Aini, F est l'ensemble des combinaisons lineaires des vecteurs $e_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0)$ et $e_2 = (-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)$. La famille (e_1, e_2) est donc une famille génératrice de F. C'est une famille libre. En effet :

$$x_3(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) = (\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) = 0$$

implique clairement $x_3 = x_4 = 0$. C'est donc une base de F. Cette base est formée de deux éléments. Donc, $\dim_{\mathbf{R}} F = 2$.

Cela correspond au résultat du cours : l'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ de p équations à n inconnues fournit une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ constitué par ses solutions.

2) Pour montrer que u et v sont dans F, on vérifie qu'ils satisfont aux équations $*$. Pour u, cela donne par exemple :

$$-4 - (-1) - 3 + 2 \times 3 = -4 + 2(-1) + 3 + 3 = 0 \quad .$$

Ainsi, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que :

$$(-4, -1, 3, 3) = x(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + y(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) = (\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}t, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, x, y) \quad .$$

On en déduit $x = 3$ et $y = 3$. Les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont donc $(3, 3)$. De méme, on montre que les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) sont dontc $(6, 3)$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au + bv = 0$. Il en résulte que les coordonnées de $au + bv$ dans la base (e_1, e_2) sont nulles. On obtient en écrivant ces coordonnées en colonne :

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3b \\ 6a + 3b \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Le couple (a, b) vérifie donc le système d'équations linéares homogènes :

$$\left[\begin{array}{rcl} 3a + 3b & = & 0 \\ 6a + 3b & = & 0 \end{array} \right. .$$

en résolvant ce système, on obtient $a = b = 0$. Ainsi, (u, v) est une famille libre. Or, la dimension de F est 2, donc (u, v) est une base de F.

Pour montrer que (u, v) est une base de F, on peut aussi considérer la matrice :

$$M_{(e_1, e_2)}(u, v) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u et v dans la base (e_1, e_2) de F. Le déterminant de cette matrice est non nul. Donc, (u, v) est une base de F.

Correction de l'exercice ?? :
1) Montrons que la famille $(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est une famille libre de E. Soit a, b, c trois réels tels que :

$$a(e_1+e_2+e_3)+b(e_2+e_3)+ce_3=0 \quad .$$

On obtient :

$$ae_1+(a+b)e_2+(a+b+c)e_3=0 \quad .$$

Comme $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E, c'est une famille libre. On en déduit :

$$a=a+b=a+b+c=0$$

Il en résulte : $a=b=c=0$. On a ainsi prouvé que la famille $\mathcal{B}'=(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est libre.

Montrons que la famille $\mathcal{B}'=(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est génératrice. Soit u un vecteur de E. Comme $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E, si (x_1,x_2,x_3) sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$u=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \quad .$$

Cherchons (X_1,X_2,X_3) trois réels, tels que :

$$u=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=X_1(e_1+e_2+e_3)+X_2(e_2+e_3)+X_3e_3 \quad .$$

Il vient :

$$x_1e_1+x-2e_2+x_3e_3=X_1e_1+(X_1+X_2)e_2+(X_1+X_2+X_3)e_3 \quad .$$

Il en résulte puisque $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E (unicité de l'expression d'un vecteur dans une base) ;

$$(*)\left\{\begin{array}{lcl} X_1 & = & x_1 \\ X_1+X_2 & = & x_2 \\ X_1+X_2+X_3 & = & x_3 \end{array}\right. \quad .$$

Ainsi, (X_1,X_2,X_3) sont les solutions d'un système linéaire. Résolvons ce système. Il se trouve qu'il est triangulé. On obtient :

$$(*) \quad X_1=x_1 \quad , \quad X_2=x_2-X_1=x_2-x_1 \quad , \quad X_3=x_3-(X_1+X_2)=x_3-x_2 \quad .$$

On a donc :

$$u=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=x_1(e_1+e_2+e_3)+(x_2-x_1)(e_2+e_3)+(x_3-x_2)e_3 \quad .$$

Le vecteur u est donc bien combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, génératrice de E. C'est donc une base de E.

On notera que l'on obtient par la formule $*$ les coordonnées (X_1,X_2,X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur dont on connait les coordonnées (x_1,x_2,x_3) dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1+x_2 \\ -x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

En fait, comme la dimension de E est trois, on aurait pu faire plus court pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base en rappelant que dans un espace vectoriel de dimension 3 une famille libre de 3 vecteurs de E est une base de E. Mais, à ce moment là, on perd la formule de changement de coordonnées.

2)

$$P = M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque P est une matrice de passage, elle est inversible. Le calcul de sont déterminant et de sa comatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la formule :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

On retrouve, l'expression donnée dans la première question.

On sait que $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ n'est autre que la matrice de changement de base de la $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, si on pose $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, et $e'_3 = e_3$:

$$\left[\begin{array}{lcl} e_1 & = & e'_1 - e'_2 \\ e_2 & = & e'_2 - e'_3 \\ e_3 & = & e'_3 \end{array} \right. .$$

Correction de l'exercice ?? :
Pour la rédaction, voir la solution de la question 1 de l'exercice **??**. Après calcul, le lecteur constatera que les systémes d'équations linéaires homogènes des exercices **??** et **??** sont égaux.
Correction de l'exercice ?? :
1) Méthode 1 : Soit a et b deux réels tels que : $au_1 + bu_2 = 0$. On en déduit :

$$a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = 0 \quad .$$

On en déduit :

$$(a + b)e_1 + (a - b)e_2 = 0 \quad .$$

Comme (e_1, e_2) est une base de E, c'est une famille libre. La dernière égalité implique donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a + b & = & 0 \\ a - b & = & 0 \end{array} \right. .$$

Résolvons ce système. On obtient : $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre. Comme E est de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de E.
1) Méthode 2 : La matrice dont les colonnes sont les cordonnées de u_1, u_2 dans la abse $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est -2. Elle est donc inversible et (u_1, u_2) est donc une base de E.

2) Méthode 1 : On a :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 & = & u_1 \\ e_1 - e_2 & = & u_2 \end{cases} \quad .$$

Résolvons ce "système linéaire" d'équations entre vecteurs. En conservant la première équation et enlevant la première équation à la seconde, on obtient le système :

$$\begin{cases} e_1 + e_2 & = & u_1 \\ -2e_2 & = & u_2 - u_1 \end{cases} \quad .$$

Il en résulte : $e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_2)$. Remplaçons e_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient :

$$e_1 = u_1 - e_2 = u_1 - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad .$$

Ainsi :

$$\left[\begin{array}{lcl} e_1 & = & \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ e_2 & = & \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \quad . \end{array} \right. \quad .$$

2) Métode 2 : La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à la base (u_1, u_2) est :

$$P = M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Calculons son inverse à l'aide de son déterminant et de sa comatrice, on obtient :

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Mais $P^{-1} = M_{(u_1,u_2)}\mathcal{B}(u_1, u_2)$. Autrement dit, les colonnes de P^{-1} donnent les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2). On retrouve le résultat précédent.

3) (a, b) et (A, B) sont liés par les formules :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\left[\begin{array}{lcl} A & = & \frac{1}{2}(a + b) \\ B & = & \frac{1}{2}(a - b) \end{array} \right. \quad , \quad \left[\begin{array}{lcl} a & = & A + B \\ b & = & A - B \end{array} \right. \quad .$$

Solution de l'exercice ?? :
Le sous-espace vectoriel F_1 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \quad (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \quad (E_2) \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_3 et x_4. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 = -3x_3 + 3x_4 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 = \{(-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-3, 1, 1, 0), (3, -2, 0, 1)$ est une base de F_1.

Le sous-espace vectoriel F_2 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \quad (E'_1) \\ x_4 & = & 0 \quad (E'_2) \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_2 et x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_2 = \{(-2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0) \text{ tels que } x_2 \ , \ x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_2 = \{x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) \text{ tels que } x_2 \ , \ x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)$ est une base de F_2.

L'ensemble $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ comme intersection de deux tels sous-espaces vectoriels. Il est constitué des solutions du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1)\\ x_2-x_3+2x_4 & = & 0 & (E_2)\\ x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E'_1)\\ x_4 & = & 0 & (E'_2)\end{array}\right. .$$

Soit :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1)\\ x_2-x_3+2x_4 & = & 0 & (E_2)\\ x_4 & = & 0 & (E'_2)\end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Il possède uen seule variable libre : x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. On obtient :

$$x_4=0 \quad .$$

Puis :

$$x_2=x_3 \quad .$$

Puis :

$$x_1=-2x_2-x_3-x_4=-3x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_1\cap F_2=\{(-3x_3,x_3,x_3,0) \text{ tels que } x_3\in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1\cap F_2=\{x_3(-3,1,1,0) \text{ tels que } x_3\in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille d'un vecteur $(-3,1,1,0)$ est une base de $F_1\cap F_2$.
Correction de l'exercice ?? :

Solution de 3
1 Les variables du système (E) sont naturellement ordonnées. Les trois équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) a même solution que le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \quad (E_1)\\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \quad (E'_2=E_2-2E_1)\\ & - & 8x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \quad (E'_3=E_3-3E_1)\end{array}\right. .$$

La première équation est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Le système (E) a même solution que le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \quad (E_1)\\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \quad (E'_2=E_2-2E_1)\\ & & & & & & 0 & = & 0 \quad (E'_3-2E'_2)\end{array}\right. .$$

Ou encore, même solution que le système triangulé :

$$(E') \quad \left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \quad (E_1)\\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \quad (E'_2=E_2-2E_1)\end{array}\right. .$$

Ce système admet pour variables libres : x_3 et x_4.

La deuxième équation du système triangulé (E') donne :

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \quad .$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient :

$$x_1 = -4x_2 + 3x_4 = x_3 \quad .$$

Il en résulte :

$$P = \{(x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$P = \{x_3(1, -\frac{1}{4}, 1, 0) + x_4(0, \frac{3}{4}, 0, 1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Les deux vecteurs $(e_1 = (1, -\frac{1}{4}, 1, 0), e_2 = (0, \frac{3}{4}, 0, 1))$ forment clairement une famille génératrice de P. On vérifie facilement qu'ils forment une famille libre de $\mathbf{R}^4$. Ainsi, (e_1, e_2) forment une base de P. On pourra noter que la liberté de (e_1, e_2) se déduit facilement de

$$ae_1 + be_2 = a(1, -\frac{1}{4}, 1, 0) + b(0, \frac{3}{4}, 0, 1) = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) \quad .$$

2) On laisse le soin au lecteur de vérifier que les deux quadruplets de réels $(1, -1, 1, -1)$ et $(0, 3, 0, 4)$ vérifient chacun les deux équations du systéme (E').

3) u appartient donc à P de base (e_1, e_2). Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$u = (1, -1, 1, -1) = ae_1 + be_2 = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) \quad .$$

On en déduit $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi $(1, -1)$ sont les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) de P. On constate d'autre part que $v = 4e_2$, donc $(0, 4)$ sont les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) de P.
4) La matrice dont les colonnes sont les cordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 4. Elle est donc inversible et (u, v) est donc une base de P.
5) $P \cap F$ est formé des solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +\ 4x_2 & & -\ 3x_4 & = 0 & (E_1) \\ & -\ 4x_2 & -\ x_3 & +\ 3x_4 & = 0 & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & & x_3 & & = 0 & \\ & & & x_4 & = 0 & . \end{array} \right.$$

Résolvons ce système qui est d'ailleurs triangulé. On a : $x_4 = x_3 = 0$. On en déduit $x_2 = 0$ et en reportant dans la première équation $x_1 = 0$. Ainsi, ce sytème admet $(0,0,0,0)$ comme unique solution. Cela montre que $P \bigcap F = \{0\}$.

6)

$$F = \{(x_1, x_2, 0, 0) \text{ tels que } x_1 \ , \ x_2 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$P = \{x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Il en résulte que $(e_3 = (1,0,0,0), e_4 = (0,1,0,0))$ est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille libre, c'est une base de F.

7) Supposons que x' et x'' existent. On a $x'' = (x''_1, x''_2, 0, 0)$ et il existe deux rées a et b tels que

$$x' = ae_1 + be_2 = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) \quad .$$

On en déduit :

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) + (x''_1, x''_2, 0, 0) \quad .$$

Soit :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + x''_1, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b + x''_2, a, b) \quad .$$

Il en résulte $a = x_3$, $b = x_4$, puis :

$$x''_2 = x_2 + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b = x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \quad .$$

et

$$x''_1 = x_1 - a = x_1 - x_3 \quad .$$

Inversement, on a bien :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4) + (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0) \quad .$$

Ainsi, $x' = x_3e_1 = x_4e_2 = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4)$ et $x'' = (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0)$ convient.