Feuille 2
Systèmes linéaires

Exercice 1 – A) $K = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires à 4 variables u, v, w, t :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} 2u & +v & +w & -t & = & 2 & (S_1) \\ 2u & -v & -w & +t & = & 3 & (S_2) \\ 4u & & & -t & = & 1 & (S_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire S ? Quel est l'ordre des équations S_1, S_2, S_3 ?
2) Donner en suivant avec soin l'algorithme du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que S.
3) Même question avec la système obtenu en changeant l'ordre des variables :

$$(U)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} -t & +w & +v & +2u & = & 2 & (U_1) \\ t & -w & -v & +2u & = & 3 & (U_2) \\ -t & & & +4u & = & 1 & (U_3) \end{array}\right. .$$

Exercice 2 – A) $K = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires à 4 variables x, y, z, t :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} x & +2y & -3z & +t & = & 4 & (S_1) \\ 2x & -y & +z & +t & = & 2 & (S_2) \\ 2x & +4y & -6z & +2t & = & 8 & (S_3) \\ x & +7y & -10z & +2t & = & 10 & (S_4) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire S ? Quel est l'ordre des équations S_1, S_2, S_3, S_4 ?
2) Donner en suivant avec soin l'algorithme du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que (S).
3) Appliquer avec soin l'algorithme de triangulation au système suivant :

$$(U)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} x & +2y & -3z & +t & = & 4 & (U_1) \\ 2x & -y & +z & +t & = & 2 & (U_2) \\ 2x & +4y & -6z & +2t & = & 17 & (U_3) \\ x & +7y & -10z & +2t & = & 10 & (U_4) \end{array}\right. .$$

4) Que pouvez vous dire des solutions de U ?

Exercice 3 – Déterminer les éléments de $\mathbf{R}^2$:

$$a)\ 2(-1,4)+5(3,1) \quad ; \quad b)\ 2(-1,-2)+2(2,7)-2(1,5) \quad ; \quad c)\ -2(3,0)+5(0,\frac{3}{10}) \quad .$$

Exercice 4 – Déterminer les éléments de $\mathbf{R}^4$:

$$a)\ 3(-1,1,\frac{1}{3},\frac{2}{9})-2(2,-3,5,\frac{1}{2}) \quad ; \quad b)\ 7(0,2,1,-2)-(1,14,2,-14)+(0,1,0,-1) \quad .$$

Exercice 5 – Pour $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, préciser à l'aide de x_1, x_2 les éléments de $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{array}{lll} a)\ (-1,2,-3) + x_1(3,0,1) + x_2(0,1,2) & ; & b)\ x_1(1,\frac{1}{2},3) + x_2(-1,1,1) \quad , \\ c)\ (-7,0,4) + x_1(1,-1,0) - x_2(\frac{1}{3},\frac{1}{4},2) & ; & d)\ 5((x_1,-2,3) - (1,x_2,4)) \quad , \\ e)\ 2(3(-4,1,x_1)) & ; & f)\ 92(-17,5x_1,607) + 8(-17,5x_1,607) \quad . \end{array}$$

Exercice 6 – Soit $x \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}^3$ indépendants de x :

$$a)\ \ (2+3x, 1+\frac{1}{2}x, 17) \quad ; \quad b)\ \ (74x, \frac{1}{3}+\frac{4}{5}x, 2x) + (3+4x, 4, 2x) \quad .$$

Exercice 7 – Soit $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments $\mathbf{R}^3$ indépendants de x_1 et x_2 :

$$\begin{array}{lll} a)\ \ (2-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2, 5+3x_1-7x_2, \frac{1}{2}x_1) & ; & b)\ \ (-4-x_2, 1+\frac{1}{2}x_2+x_1, 2-17x_1+x_2) \quad , \\ c)\ \ (2x_2, x_1+x_2, -x_1) & ; & d)\ \ (1-2x_2+x_1, x_1, x_2) \quad . \end{array}$$

Exercice 8 – Soit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, décomposer sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments $\mathbf{R}^3$ indépendants de x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{array}{l} a)(-1+x_1+2x_2-x_3, 17+2x_1-x_2+x_3, -1-x_1+x_2-x_3) \quad , \\ b)(-1+x_2+2x_1-x_3-\frac{1}{2}x_1, 17+2x_3-x_2+x_1+\frac{1}{3}x_3, -1-x_2+x_3-x_1-\frac{1}{2}x_2) \quad , \\ c)(x_2, x_3, 7-5x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3) + (0, 4x_2-1, 2x_3) \quad , \\ d)(x_2+2x_1-x_3, 17+2x_3-x_2+x_1, -x_2+x_3-x_1) + (x_3, -x_1, 7x_2) \quad . \end{array}$$

Exercice 9 – Expliciter dans $\mathbf{R}^3$ les solutions des systèmes :

$$(S_1) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_2) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_2 - 8x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Interpréter géométriquement les solutions de ces deux systèmes.
Expliciter dans $\mathbf{R}^3$ les solutions du système :

$$(S_1) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \end{array} \right. \quad .$$

Que représente géométriquement cet ensemble de solutions ?
L'élément $(0,0,-9)$ est-il combinaison linéaire des éléments $u_1 = (1,0,-4)$, $u_2 = (-2,2,5)$ et $u_3 = (1,-8,9)$? En est-il de même de tout $(y_1,y_2,y_3) \in \mathbf{R}^3$?

Exercice 10 – $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Appliquer avec soin l'algorithme de Gauss de triangulation d'un système donné dans le cours pour trianguler les deux systèmes :

$$(S1) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_2 - 4x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S2) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_2 - 4x_3 & = & 17,17 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 & = & 1 \end{array} \right. .$$

En déduire les solutions de ces systèmes.
Mêmes questions avec $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Exercice 11 – $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ccccl} 2x_1 & & -x_3 & & = 0 \\ 3x_1 & & & -x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & x_2 & -3x_3 & & = 0 \end{array} \right. .$$

Appliquer avec soin l'algorithme de Gauss de triangulation d'un système pour trianguler ce système.
Expliciter les solutions du système S.
Quelles sont les solutions de S formés de quadruplets d'entiers ?

Exercice 12 – Equilibrer l'équation chimique :

$$B_2S_3 + H_20 \longrightarrow H_3B0_3 + H_2S \quad .$$

Introduire de même un système linéaire pour équilibrer l'équation chimique :

$$PbN_6 + CrMn_2O_8 \longrightarrow Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO \quad .$$

Expliciter les solutions de ce système linéaire. Puis, en déduire l'équation équilibrée.

Exercice 13 – $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad : \quad \left[\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 & = & 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Appliquer avec soin l'algorithme de Gauss de triangulation d'un système pour trianguler ce système.
Expliciter les solutions du système E à l'aide des variables libres.
Mêmes questions en considérant comme ordre des variables : x_5 d'ordre 1, x_4 d'ordre 2, $x3$ d'ordre 3, x_2 d'ordre 4, x_1 d'ordre 5, c'est à dire le système :

$$(E') \quad : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -x_5 + x_4 + 3x_3 + 2x_2 + x_1 & = & 1 \\ x_5 + x_4 + x_3 - x_2 + 3x_1 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Exercice 14 – On considère l'équation linéaire $E \ : \ 2x_1 + 3x_2 = 7$.
Expliciter les solutions de cette équation lorsque le corps $\mathbf{K}$ est respectivement $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ $\mathbf{C}$.
Déterminer les couples d'entiers relatifs (x_1, x_2) solutions de l'équation E.
Même exercice avec l'équation : $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 17$.

Exercice 15 – On considère l'équation linéaire à coefficients complexes :

$$(E) \quad : \quad (1+i)x_1 - ix_2 = 3 \quad .$$

Expliciter les solutions complexes de cette équation.
Déterminer les couples de réels solutions de l'equation E.

Exercice 16 – $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Appliquer l'algorithme de Gauss de triangulation d'un système pour trianguler le système :

$$(E_1) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +2x_3 & & -x_4 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Quelles sont les variables libres ? Expliciter les solutions de ce système ?
Même question avec le système :

$$(E_2) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 3 \end{array} \right. .$$

Expliciter les solutions du système :

$$(E) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & & +2x_4 & = & 3 \end{array} \right. .$$

L'élément $u = (1,2,2,3)$ de $\mathbf{R}^4$ est-il combinaison linéaire des éléments $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (1,0,1,1)$, $u_3 = (1,2,-1,0)$ et $u_4 = (1,-1,1,2)$. En est-il de même de tout élément (y_1,y_2,y_3,y_4) de $\mathbf{R}^4$?

Exercice 17 – $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Soit $a, b \in \mathbf{R}$, on considère le système d'équations linéaires des variables x, y, z :

$$(E)(a,b) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x + ay + z & = & 3 \\ x + 2ay + z & = & 4 \\ x + y + bz & = & 3 \end{array} \right. .$$

En déduire en fonction des valeurs du couple (a,b) les solutions de ce système.
Expliciter avec précision suivant les valeurs du couple (a,b) l'algorithme de Gauss de triangulation d'un systéme donné dans le cours au systéme $E(a,b)$.
En déduire en fonction des valeurs du couple (a,b) les solutions de ce système.

Exercice 18 – Considérons un réseau de 4 pages internet. La page 1 pointe sur les pages 2,3 et 4. La page 2 pointe sur les pages 3 et 4. La page 3 pointe sur la page 1. La page 4 pointe sur les pages 1 et 3. On suppose que le facteur d'impact de chaque page est la somme des facteurs d'impact de chaque page i pointant sur elle divisés par le nombre de pages que pointe la page i. Trouver le facteur d'impact de chaque page. On normalisera pour que la somme des facteurs d'impact soit égale à 1.

Exercice 19 – $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$, on considère le système d'équations linéaires

$$(E(\lambda)) \quad : \quad \left[\begin{array}{lcl} (1-\lambda)x + 2y - 2z & = & 0 \\ -x + (3-\lambda)y & = & 0 \\ 2y + (1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Montrer que si $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) \neq 0$ le système admet $(0,0,0)$ comme unique solution.
Déterminer les nombres complexes λ tels que $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$.
Montrer que $(x,y,z) \in \mathbf{C}^3$ est une solution de $E(\lambda)$ si et seulement si $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ est une solution de $E(\overline{\lambda})$. En déduire une bijection des solutions de $E(\lambda)$ vers les solutions de $E(\overline{\lambda})$.
Expliciter pour chacune des valeurs de λ vérifiant $(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$ les solutions de $E(\lambda)$.