mardi 1 novembre 2016 14:19

①

$$E\quad\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 & (E_1)\\ 2x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 4 & (E_2)\\ 4x_1 + 8x_3 + 4x_4 = 12 & (E_3)\end{cases}$$

Les variables sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnée ainsi. Les trois équations formant le système E sont d'ordre 1. Le système est ordonné.
E a même solution que le système

$$E'\quad\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 & (E_1)\\ -4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = -4 & (E_2 - 2E_1) = E_2'\\ -4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = -4 & (E_3 - 4E_1) = E_3'\end{cases}$$

Ce système est encore ordonné. L'ordre des équations est respectivement 1, 2, 2. Il a les mêmes solutions que

$$E''\quad\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 & E_1\\ -4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = -4 & E_2'\\ 0 = 0. & E_3' - E_2'\end{cases}$$

nous pouvons supprimer l'équation $0 = 0$. Le système E a donc m̂ solutions que les solutions du système triangulé :

$$E'''\quad\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4\\ -4x_2 + 12x_3 - 4x_4 = -4\end{cases}$$

Les variables libres de E''' sont x_3 et x_4.

Résolvons ce système : la dernière équation donne

$$x_2 = 1 + 3x_3 - x_4$$

Nous obtenons, alors

$$x_1 = 4 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 - 1 - 3x_3 + x_4 + x_3 - 2x_4$$
$$= 3 - 2x_3 - x_4$$

Soit S l'ensemble des solutions de E

$$S = \{(3 - 2x_3 - x_4,\ 1 + 3x_3 - x_4,\ x_3,\ x_4) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$
$$\boxed{= \{(3,1,0,0) + x_3(-2,3,1,0) + x_4(-1,-1,0,1) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}}$$

Vérification $(3,1,0,0)$ vérifie bien les trois équations de départ. De plus, $(-2,3,1,0)$ et $(-1,-1,0,1)$ sont bien solutions du système homogène associé à E.

② Par la même méthode, en suivant l'algorithme du cours, le lecteur vérifiera que

$$P = \{x_3(-2,3,1,0) + x_4(-1,-1,0,1) \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Suivant le cours, l'algorithme de résolution d'un système d'équations homogènes fournit une base du sous-espace vectoriel de ses solutions :

$\mathcal{B} = (u, v)$ où $\boxed{u = (-2,3,1,0) \text{ et } v = (-1,1,0,1)}$ est donc une base de P.

(Sur la définition de P, il est clair que u, v engendrent P. Il est facile de montrer que cette famille est libre)

$$\begin{matrix} -2 & +8 & -2 & -4 & =0\\ -4 & -16 & +20 & & =0\\ -8 & & +16 & -8 & =0\end{matrix}$$

Donc $\boxed{w = (-2, 8, 2, -2) \in P}$. Si (a,b) sont les coordonnées de w dans la base (u,v) :

$$w = au + bv = (-2a - b, 3a + b, a, b)$$
$$= (-2, 8, 2, -2)$$

Il en résulte $a = 2$, $b = -2$. Ainsi, $\boxed{(2,-2)}$ sont les coord. de w dans la base (u,v).

Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

1) $\det(A) = 2 - (3) = -1$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$

2) $A' = T_{2,1}\left(\frac{3}{2}\right) A = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\qquad T_{2,1}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$

$A'' = D_2(-2) D_1\left(\frac{1}{2}\right) A' = \begin{pmatrix} 1 & -1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad D_2(-2) D_1(1/2) T_{2,1}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

$A''' = T_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right) A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad T_{1,2}(1/2) D_2(-2) D_1(1/2) T_{2,1}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

Ainsi $T_{1,2}(1/2) D_2(-2) D_1(1/2) T_{2,1}(3/2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

A est donc inversible

$$\boxed{A^{-1} = T_{1,2}\left(\tfrac{1}{2}\right) D_2(-2) D_1(1/2) T_{2,1}(3/2)} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$$

On retrouve le résultat précédent. De plus, nous avons écrit A^{-1} comme produit de matrices élémentaires. Nous en déduisons :

$$A = (A^{-1})^{-1} = T_{2,1}(3/2)^{-1} D_1(1/2)^{-1} D_2(-2) T_{1,2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}$$

Donc, $\boxed{A = T_{2,1}(-3/2) D_1(2) D_2(-1/2) T_{1,2}(-1/2)}$.

3) $AX = C$ comme A est inversible, cette équation équivaut à

$$X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2\\ -6 & -4 & -6\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8\\ 18 & 14 & 18\end{pmatrix}$$

Une solution $\boxed{X = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 8\\ 18 & 14 & 18\end{pmatrix}}$

4) Plusieurs méthodes possibles pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$

$m_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix} = A$ est inversible (question 1).

Donc, (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$

Autre méthode, $\mathbb{R}^2$ étant un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2, pour montrer que (u, v) est une base, il suffit de montrer que la famille (u,v) est libre.

$au + bv = (0,0)$ équivaut à

$a(2,-3) + b(-1,1) = (2a - b, -3a + b) = (0,0)$

donc, équivaut à $\begin{cases} 2a - b = 0\\ -3a + b = 0\end{cases}$

On vérifie alors que ce système admet $(0,0)$ comme unique solution (ajouter les équations donne $-a = 0$, donc $a = 0$. Il en résulte $b = 0$)

5) A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}' = (u, v)$.
Les coordonnées de $w = (1,1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $\boxed{(1,1)}$ puisque $w = 1(1,0) + 1(0,1) = 1.e_1 + 1.e_2$
Si (α, β) sont les coordonnées de w dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\\ -5\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{(\alpha, \beta) = (-2,-5)}$

Exercice 3 :

1) $\det M = 2\det\begin{pmatrix} 5 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

$= 2(-5 - (-2)) - 2(-4 - (-2)) + (-4 - (-5))$

$= 2(-3) - 2(-2) + 1 = -6 + 4 + 1 = -1$

$\boxed{\det M = -1}$ ainsi M est inversible

$$\text{comatrice de } M = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 5 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ -\det\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\\ \det\begin{pmatrix} 4 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\text{com}(M) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \times {}^t\text{com}(M) = -1\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}}$

2) Le système d'équations linéaires équivaut au système matriciel

$$M\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ 0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Comme M est inversible, il admet comme seule solution :

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\\ 0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}\\ 3\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad \boxed{(a,b,c) = (4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2})}$$

unique solution du système

3) $m_{\mathcal{B}}(u, v, w) = M$ est inversible. Donc, $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E

4) Les coordonnées de $e_1 - e_3$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\boxed{(1,0,-1)}$
Les coordonnées de $e_1 - e_3$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont donc (a,b,c) où

$$\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$ puisque M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$

D'où $\boxed{(a,b,c) = (4,-1,3)}$

Exercice 4 :

1) Par définition (u, v) engendrent P. Pour montrer que (u,v) est une base de P, il suffit de montrer que la famille (u,v) est libre. Soit $x, y \in \mathbb{R}$:

$xu + yv = 0$ équivaut à

$x(2,-3,-1,0) + y(1,1,0,1) = (0,0,0,0)$

$(2x + y, -3x + y, -x, y) = (0,0,0,0)$

Cela implique $x = y = 0$. Notre famille (u, v) est bien libre.

2) $2u + 2v = (6, -4, -2, 2) = w$

Donc, $c \in P$ et $(2,2)$ sont les coordonnées de c dans la base (u, v).