1 Corps des nombres complexes

Introduction : Au paragraphe 1.1 nous rappelons la définition de l'ensemble des nombres complexes muni de leurs opérations d'addition et de multiplication. Au paragraphe 1.2, nous définissons le module et l'argument d'un nombre complexe non nul qui permettent d'écrire tout nombre complexe z non nul sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$. Au paragraphe 1.3, nous montrons comment identifier l'ensemble des nombres complexes et l'ensemble des points d'un plan muni d'un repère orthonormé. Nous illustrons rapidement cette correspondance. Au paragraphe 1.4, nous montrons comment exprimer les solutions d'une équation du second degré à l'aide d'une racine carrée de son discriminant. Au paragraphe 1.5, nous montrons comment interpréter géométriquement les applications de l'ensemble des nombres complexes vers lui même associant à un complexe z le complexe $az + b$ où a et b sont des complexes non nuls fixés. Pour $a \neq 1$, nous montrons comment décomposer une telle application comme le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

Nous fixons deux objectifs.

1) Savoir **résoudre une équation du second degré** dont les coefficients sont des nombres complexes. Nous expliquerons notamment en travaux dirigés comment résoudre algébriquement l'équation $\delta^2 = \Delta$ où Δ est un nombre complexe donné par sa partie réelle et sa partie immaginaire. On se reportera à l'exercice 1 du paragraphe 1.6 et aux exercices de la première feuille de T.D. .

2) Savoir **décomposer une similitude directe comme le produit d'une rotation et d'une homothétie de même centre**. Ce centre se détermine en résolvant une équation du premier degré à coefficients complexes. L'angle de la rotation et de le rapport de l'homothéthie nécessitera de savoir déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe. On se reportera aux exercices 2 et 3 du paragraphe 1.6 et aux exercices de la première feuille de T.D. .

1.1 Le corps des nombres complexes

Deux réels a et b définissent un nombre complexe noté $z = a + ib$. Le réel a, noté $a = \mathrm{Re} z$, est appelé la partie réelle de z et le réel b, noté $b = \mathrm{Im} z$, est appelé la partie imaginaire de z.

Pour tout a, a', b, b', on a :

$$a + ib = a' + ib' \quad \Longleftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b' \quad .$$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

Sur $\mathbf{C}$, nous définissons deux opérations appelées addition et multiplication. Soit a, a', b, b' quatre réels et $z = a + bi, z' = a' + b'i$ les nombres complexes correspondants.

— L'addition de z et z' dans $\mathbf{C}$ est définie par :

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i \quad ,$$

— La multiplication de z et z' dans $\mathbf{C}$ est définie par :

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + ba')i \quad .$$

a) Propriétés de l'addition de C :

L'addition est associative, c'est à dire que pour tout $z, z', z'' \in \mathbf{C}$:

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \quad .$$

L'addition est commutative, c'est à dire que pour tout $z, z' \in \mathbf{C}$:

$$z + z' = z' + z \quad .$$

Le complexe $0+0i$, noté 0, est appelé l'élément neutre de l'addition. C'est le seul nombre complexe vérifiant pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$z+(0+0i)=(0+0i)+z=z \quad .$$

Tout élement $z \in \mathbf{C}$ admet un symétrique z', noté $-z$. C'est le seul nombre complexe vérifiant :

$$z+z'=z'+z=0 \quad .$$

Au vue de ces quatre propriétés, on dit que $\mathbf{C}$ est un groupe commutatif relativement à l'addition.

b) Propriétés de la multiplication dans C :

La multiplication est associative, c'est à dire que pour tout $z, z', z'' \in \mathbf{C}$:

$$(zz')z''=z(z'z'') \quad .$$

La multiplication est commutative, c'est à dire que pour tout $z, z' \in \mathbf{C}$:

$$zz'=z'z \quad .$$

La multiplication possède un élément neutre $1+0i$, noté 1. C'est le seul nombre complexe vérifiant pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$z(1+0i)=(1+0i)z=z \quad .$$

Tout élement $z \in \mathbf{C}$ distinct de 0 admet un symétrique z' appelé inverse de z, noté z^{-1} ou $\dfrac{1}{z}$. Ce complexe z' est l'unique élément de $\mathbf{C}$ vérifiant :

$$zz'=z'z=1 \quad .$$

Au vue de ces propriétés, on dit que $\mathbf{C}$ est un corps commutatif relativement aux opérations addition et multiplication.

Sur le corps des nombres complexes, on peut distinguer une troisième opération dite de multiplication par un réel. Elle associe à tout réel λ et tout complexe $z=a+bi$ le complexe :

$$\lambda z=\lambda a+\lambda bi \quad .$$

Notation 1.1.1 *Soit a, b deux réels. Le complexe $a + 0i$ est noté a, $0 + bi$ est noté bi, $0 + 1i$ est noté i. On constatera la cohérence de ces notations.*

Soit z, z' deux complexes, on pose $: z + (-z') = z - z'$ et si $z' \neq 0 \; : \; z\dfrac{1}{z'} = \dfrac{z}{z'}$.

Soit $z = a + bi$ avec a et b réels, l'opposé de z est

$$-z = (-a) + (-b)i = -a - bi \quad .$$

Soit $z = a + bi \neq 0$ avec a et b réels, l'inverse de z est :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \quad .$$

Comme la multiplication est commutative, noter que pour tout réel a, b : $a + bi = a + ib$.

Définition 1.1.2 *Un nombre complexe est dit réel si sa partie imaginaire est nulle et imaginaire pur si sa partie réelle est nulle.*

L'application $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $a \mapsto a = a + 0i$ identifie les nombres réels aux nombres complexes de partie imaginaire nulle. Cette identification est compatible aux opérations addition et multiplication.

Définition 1.1.3 *(Puissance n-ième) Soit z un nombre complexe, on convient que $z^0 = 1$ et que $z^1 = z$. Soit n un entier naturel non nul, on désigne par $z^n = z.z \ldots z = zz^{n-1}$ le produit n fois de z par lui même. Le complexe z^n est appelé la puissance n-ième de z.*

On convient alors pour z non nul que $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$.

Pour tout n, m entiers relatifs, on a alors :

$$z^n z^m = z^{n+m} \quad , \quad (z^n)^m = z^{nm} \quad .$$

Exemple : $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. Soit n un entier relatif, divisons n par 4 : n = 4k+r avec k, r entier relatif et $0 \leq r \leq 3$. Alors :

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} i^r = (i^4)^k i^r = i^r \quad .$$

Soit z, z' deux nombres complexes, il résulte des propriétés des nombres complexes que :

$$zz' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 0 \text{ ou } z' = 0 \quad .$$

Définition 1.1.4 *On appelle conjugaison l'application :*

$$\mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad : \quad z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi \quad , \quad \text{où } a, b \in \mathbf{R} \quad .$$

Le nombre complexe $\overline{z} = a - bi$ est appelé le conjugué de z.

Propriétés de la conjugaison : Soit $z, z' \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$:

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad , \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \quad , \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \quad , \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad , \quad \mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad , \quad \mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \quad .$$

En particulier, on obtient :

$$\overline{z} = z \Longleftrightarrow \mathrm{Im} z = 0 \quad , \quad \overline{z} = -z \Longleftrightarrow \mathrm{Re} z = 0 \quad .$$

Soit a, b deux réels et $z = a + bi$, on a : $z\overline{z} = a^2 + b^2$ qui est donc un réel positif.

Définition 1.1.5 *Soit a, b deux réels et $z = a + bi$. On appelle module de z et on note $\mid z \mid$ le nombre réel positif :*

$$\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} \quad .$$

On remarque que si z est réel, $\mid z \mid$ n'est autre que la valeur absolue de z.

Remarques : Soit $z \in \mathbf{C}$: $\mid z \mid = \mid \overline{z} \mid$ et $\mid z \mid^2 = z\overline{z}$ et si de plus $z \neq 0$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{\mid z \mid^2}$.

Propriétés du module d'un nombre complexe : Soit $z, z' \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$:

$$\mid z \mid = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \quad , \quad \mid z + z' \mid \leq \mid z \mid + \mid z' \mid \quad , \quad \mid \lambda z \mid = \mid \lambda \mid \mid z \mid \quad .$$

On a aussi :

$$\mid zz' \mid = \mid z \mid \mid z' \mid \ , \ \mid z^n \mid = \mid z \mid^n \ , \ \mid \frac{1}{z} \mid = \frac{1}{\mid z \mid} \text{ pour} z \neq 0 \ , \ \mid \mid z \mid - \mid z' \mid \mid \leq \mid z - z' \mid \ , \ \mid \mathrm{Re} z \mid \leq \mid z \mid \ , \ \mid \mathrm{Im} z \mid \leq \mid z \mid \ .$$

Pour tout z complexe non nul, on vérifie que $\dfrac{z}{\mid z \mid}$ est de module 1.

Montrons par exemple la formule $\mid zz' \mid = \mid z \mid \mid z' \mid$. Soit a, b, a', b' réels tels que $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$:

$$\begin{aligned}
\mid zz' \mid &= \mid (aa' - bb') + (ab' + ba')i \mid = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2} \\
&= \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 - 2aa'bb' + a^2b'^2 + b^2a'^2 + 2aa'bb'} \\
&= \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(a'^2 + b'^2)} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(a'^2 + b'^2)} = \mid z \mid \mid z' \mid \quad .
\end{aligned}$$

1.2 Argument d'un nombre complexe

Rappelons quelques résultats sur les fonctions trigonométriques.

a) Pour tout θ réel : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

b) $\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbf{Z} \ ; \ \theta' - \theta = 2k\pi$.

c) .Soit $x, y \in \mathbf{R}$: $x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in [0, 2\pi[$ unique ; $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$.

d) $\begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' \end{cases}$.

Notation 1.2.1 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Pour tout θ, θ' réels, on peut alors vérifier la formule magique :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \quad .$$

Définition 1.2.2 *Soit z un complexe non nul, le complexe $\frac{z}{\mid z \mid}$ est de module 1. Il existe donc a, b réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ tels que $\frac{z}{\mid z \mid} = a + bi$. On appelle alors argument de z, noté $\arg z$, l'unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.*

Ainsi, un nombre complexe non nul z s'écrit : $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est le module de z et θ son argument. Une telle écriture est unique, en particulier, deux complexes non nuls sont égaux s'ils ont même module et argument.

Donnons quelques propriétés de l'argument :

a) Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ et $\theta = \arg z$: $z = \mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta) = \mid z \mid e^{i\theta}$.

b) Pour tout $z, z' \in \mathbf{C} - \{0\}$: $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.

c) Pour tout θ réel et ρ réel strictement positif : $z = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow \mid z \mid = \rho$ et $\theta = \arg z \pmod{2\pi}$.

Rappelons que si a est un nombre réel positif et n un entier naturel, il existe un unique réel positif noté $a^{1/n}$ dont la puissance n-ième est égal à a, c'ést à dire solution de l'équation : $x^n = a$ et $x \in \mathbf{R}^+$. Le réel $a^{1/n}$ est appelé la racine n-ième de a

Définition 1.2.3 *(racine n-ième de l'unité) Soit n un entier naturel, on appelle racine complexe n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.*

Le produit de deux racines n-ième de l'unité est une racine n-ième de l'unité. L'inverse d'une racine n-ième de l'unité est une racine n-ième de l'unité. On traduit ces propriétés en disant que l'ensemble des racines n-ième de l'unité est un <u>sous-groupe multiplicatif</u> du groupe multiplicatif des complexes non nuls (voir la section structures algébriques).

Proposition 1.2.4 *Le nombre complexe* $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ *est une racine n-ième de l'unité. L'ensemble des racines n-ième de l'unité est l'ensemble à n éléments :*

$$C_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \ ; \ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\} = \{1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}\} \quad .$$

Exemples : $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, -1\}$, $C_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $C_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Racines n-ième d'un nombre complexe donné par son module et son argument :

Soir c un complexe non nul, r le module de c et $\alpha \in [0, 2\pi[$ son argument. On appelle racine n-ième de c, tout nombre complexe z tel que $z^n = c$. Cette égalité équivaut à :

$$\mid z \mid^n = r \text{ et } n \arg z = \alpha \pmod{2\pi} \quad \text{ou encore} \quad \mid z \mid = r^{\frac{1}{n}} \text{ et } \arg z = \frac{\alpha}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \quad .$$

Le nombre complexe c non nul a donc n racines n-ième qui sont les éléments de l'ensemble :

$$\{r^{\frac{1}{n}} \, e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \quad ; \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\} \quad .$$

Exemple : Déterminons les complexes z tels que $z^3 = 1 + i$. On a $\mid 1 + i \mid = \sqrt{2}$, d'où :

$$1 + i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad .$$

Les complexes cherchés sont donc les éléments de l'ensemble :

$$\{2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}} \quad ; \quad k \in \{0, 1, 2\}\} \quad .$$

1.3 Nombres complexes et géométrie

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. L'application :

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{C} & \longrightarrow & P \\ z = x + yi & \longmapsto & M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \text{le point de coordonnées } x, y \text{ dans le repère } (0, \vec{i}, \vec{j}) \end{array}$$

est une bijection qui identifie l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ et le plan P. Le nombre complexe z est appelé l'affixe du point M.

Rappelons que si A et B sont deux points de$P$, AB est le réel positif qui désigne la distance de A à B et que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de P, $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ désigne l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous avons alors :

$$| z |= \sqrt{x^2+y^2} = OM \quad \text{et} \quad \arg z = (\widehat{\vec{i},\vec{OM}}) \quad .$$

Si M_1 est d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2 :

$$|| M_1\vec{M}_2 ||=| z_2 - z_1 | \quad \text{et} \quad \arg(z_2-z_1) = (\widehat{\vec{i},M_1\vec{M}_2}) \quad .$$

Indiquons comment se traduisent géométriquement quelques opérations sur les nombres complexes :

Addition : Soit M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2, le point M d'affixe z_1+z_2 est le point M du plan défini par $O\vec{M} = O\vec{M}_1 + O\vec{M}_2$. Soit $z_1 = x_1+y_1 i$ et $z = x+yi$. Soit $\vec{u}$ vecteur de cordonnés (x_1, y_1) dans le repère $(\vec{i},\vec{j})$. et M le point d'affixe $z = x+yi$. Le point M' d'affixe $z+z_1$ a donc pour coordonnées $(x+x_1, y+y_1)$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$. C'est l'image de M par la transation de vecteur $\vec{u}$. Il est défini par $M\vec{M}' = \vec{u}$.

Multiplication par un réel : Soit M d'affixe $z = x+yi$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Le point M' d'affixe λz a donc pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$. C'est l'image de M par l'homothétie de centre 0 et de rapport λ.

Conjugaison : Soit M d'affixe $z = x+yi$. Le point M' d'affice $\overline{z}$ a donc pour coordonnées $(x, -y)$ dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$. C'est l'image de M par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

Multiplication par $e^{i\theta}$: Soit M d'affixe $z = x+yi$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Le point M' d'affixe $e^{i\theta}z$ est l'image de M par la rotation de centre l'origine et d'angle θ. Les coordonnées de M' dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ sont $(\cos\theta x - \sin\theta y, \sin\theta x + cos\theta y)$.

Soit M_1, M_2, M_3 trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectivement z_1, z_2, z_3, on a :

$$\arg(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}) = (\widehat{\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}}) \quad .$$

1.4 Équations du second degré

Rappelons que si a est un nombre réel positif, il existe un unique réel positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal à a, c'est à dire solution de l'équation : $x^2 = a \quad \text{et} \quad x \in \mathbf{R}^+$. Le réel $\sqrt{a}$ est appelé la racine carrée de a. Ce résultat se déduit des propriétés de l'ensemble des nombres réels.

Lemme 1.4.1 *Pour tout $\Delta \in \mathbf{C}$, il existe $\delta \in \mathbf{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On dit que δ est une racine carrée de Δ.*

Ce lemme se déduit de la proposition 1.2.4. Nous montrerons en fait, voir les exercices type 1.6, comment il est possible de déterminer une expression algébrique des racines carrées d'un nombre complexe Δ donnée par sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Cas particulier : Comme $i^2 = -1$, si b est un réel négatif, $i\sqrt{-b} = i\sqrt{\mid b \mid}$ est une racine carrée de b.

Soit $\Delta \in \mathbf{C}$ non nul et δ est une racine carrée de Δ. L'équation :

$$z^2 = \Delta \quad \text{et} \quad z \in \mathbf{C}$$

admet alors deux solutions : δ et $-\delta$. On remarque en effet que cette équation équivaut à $z^2 = \delta^2$, soit $z^2 - \delta^2 = 0$, qui équivaut encore $(z - \delta)(z + \delta) = 0$. Comme un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ces nombres est nul, les solutions cherchées sont bien δ et $-\delta$.

Soit maintenant $a \neq 0$, b et c trois nombres complexes (ils peuvent donc être réels). Pour tout $z \in \mathbf{C}$, observons que :

$$az^2 + bz + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] \quad .$$

On obtient alors :

Proposition 1.4.2 *Soit $a \neq 0$, b et c trois nombres complexes. Soit $\delta \in \mathbf{C}$ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Posons :*

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad .$$

i) Si $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $z \in \mathbf{C}$ admet deux solulions : z_1 et z_2.

ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, alors $z_1 = z_2$ et l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $z \in \mathbf{C}$ admet une seule solution : $z_1 = z_2$. Le complexe $b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

Remarque 1.4.3 *(lien entre coefficients et racines) :*

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad , \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a} \quad , \quad (z_1 - z_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \quad .$$

Remarque 1.4.4 *(factorisation) : Pour tout z complexe :*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \quad .$$

1.5 Similitudes directes

Soit a un nombre complexe non nul et b un nombre complexe. Considérons l'application :

$$\phi_{a,b} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \ : z \mapsto \phi_{a,b}(z) = az + b \quad .$$

Une telle application est appelée une similitude directe.

On dit que le nombre complexe z est un point fixe de $\phi_{a,b}$ si $\phi_{a,b}(z) = z$. Discutons en fonction des valeurs de a et b de la nature de $\phi_{a,b}$.

1. **Cas** $a = 1$ **et** $b = 0$ **:** L'application $\phi_{1,0}$ est l'identité de $\mathbf{C}$. C'est à dire que pour tout complexe z, $\phi_{a,b}(z) = z$, ou encore tout complexe z est point fixe de $\phi_{1,0}$.

2. **Cas** $a = 1$ **et** $b \neq 0$ **:** Pour tout complexe z, on a $\phi_{1,b}(z) = z + b$. Soit M le point d'affixe z. Le point M' d'affixe $\phi_{1,b}(z) = z + b$ est l'image par M de la translation de vecteur de coordonnées $(\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}b)$.
3. **Cas** $a \neq 1$ **:** Commençons par chercher les points fixes de $\phi_{a,b}$. Un complexe z est un point fixe de $\phi_{a,b}$ si et seulement si $\phi_{a,b}(z) = z$. Cette égalité se traduit par :

$$az + b = z \quad \text{ou encore} \quad (1 - a)z = b \quad .$$

Comme a est supposé distinct de 1, l'application $\phi_{a,b}$ a donc comme unique point fixe $z_0 = \dfrac{b}{1 - a}$. On obtient alors pour tout complexe z :

$$\phi_{a,b}(z) - \phi_{a,b}(z_0) = a(z - z_0) \quad \text{ou encore} \quad \phi_{a,b}(z) - z_0 = a(z - z_0) = \rho e^{i\theta}(z - z_0) \ ,$$

où ρ est le module de a et θ son argument. Soit M le point d'affixe z, et Ω d'affixe z_0, nous déduisons de notre formule que le point M' d'affixe $\phi_{a,b}(z)$ est l'image de M par la composée de la rotation d'angle θ de centre Ω et de l'homothétie de rapport ρ de même centre Ω. On constatera que ces deux transformations commutent. Cette décomposition en un produit de rotation et d'homothétie de même centre est unique.

1.6 Objectifs

A) Résolution des équations du deuxième degré à coefficients complexes.

Exercice 1
a) Trouver les complexes δ tels que $\delta^2 = -9 + 8i$.
b) Trouver les racines complexes de l'équation : $z^2 + z(i + 2) + 3 - i = 0$.

Solution de l'exercice 1
a) Commençons par chercher un complexe $\delta = x + iy$ avec x, y réels tels que $\delta^2 = -9 + 8i$. Comme $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, l'èquation $\delta^2 = -9 + 8i$ équivaut à :

$$x^2 - y^2 = -9 \quad \text{et} \quad 2xy = 8 \; .$$

D'autre part, on obtient l'égalité entre modules $|\delta|^2 = |-9+8i|$. Il en résulte :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{81+64} = \sqrt{145} \; .$$

Ainsi, (x, y) est solution de :

$$x^2 - y^2 = -9 \quad , \quad x^2 + y^2 = \sqrt{145} \quad \text{et} \quad xy > 0 \; .$$

D'où

$$x^2 = \frac{-9+\sqrt{145}}{2} \quad , \quad y^2 = \frac{9+\sqrt{145}}{2} \quad , \quad xy > 0 \; .$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} \quad , \quad y = \pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}} \quad , \quad xy > 0 \; .$$

D'où, puisque x et y ont même signe :

$$\delta = \sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} + i\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}} \quad \text{ou} \quad \delta = -\sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} - i\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}} \; .$$

Comme $-9+8i \neq 0$, nous savons que l'équation $\delta^2 = -9+8i$ admet deux solutions. Les deux valeurs ci-dessus sont donc les deux solutions cherchées.

b) Considérons l'équation du deuxième degré à coefficients complexes : $z^2 + z(i+2) + 3 - i = 0$. $z \in \mathbf{C}$.

$$z^2 + z(i+2) + 3 - i = 0 \; .$$

Un calcul direct donne $(i+2)^2 - 4(3-i) = -9+8i$. Ainsi, si δ est une solution de $\delta^2 = (i+2)^2 - 4(3-i) = -9+8i$, les racines de notre équation sont :

$$u_1 = \frac{-i-2+\delta}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-i-2-\delta}{2} \; ,$$

D'après la question précédente, prenons :

$$\delta = \sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} + i\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}} \quad ,$$

les racines de notre équation sont donc :

$$u_1 = \frac{-i-2+\sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} + i\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}}}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-i-2-(\sqrt{\frac{-9+\sqrt{145}}{2}} + i\sqrt{\frac{9+\sqrt{145}}{2}})}{2} \; .$$

B) Décomposition d'une similitude directe de rapport distinct de 1 comme la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

Exercice 2 On considère la similitude directe $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(z) = (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Caractériser géométriquement cette similitude.

Solution de l'exercice 2 Comme $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est un complexe non nul distinct de 1. La similitude f a un unique point fixe. Soit z_0 ce point fixe, il vérifie :

$$z_0 = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

On obtient :

$$(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = i \; .$$

Le coefficient de z dans la similitude directe f est $(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ainsi f est la rotation de centre i et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3

$$f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \quad , \quad z \mapsto f(z) = (\sqrt{3} - i)z + 2 \, .$$

Caractériser géométriquement cette similitude.

Solution de l'exercice 3 Comme $\sqrt{3} - i$ est un complexe non nul distinct de 1. La similitude f a un unique point fixe. Soit z_0 ce point fixe, il vérifie :

$$z_0 = (\sqrt{3} - i)z_0 + 2$$

On obtient :

$$(1 - \sqrt{3} + i)z_0 = 2 \quad \text{et} \quad z_0 = \frac{2}{1 - \sqrt{3} + i} = \frac{2(1 - \sqrt{3}) - 2i}{5 - 2\sqrt{3}} \, .$$

2) Le coefficient de z dans la similitude directe f est $(\sqrt{3} - i) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Ainsi f est la composée de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$ de centre z_0 et de l'homothétie de rapport 2 et de centre z_0.