Algèbre
Cours Fondements S1 et S2
Février 2018

March 8, 2018

Contents

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Introduction

Soit $n+1$ nombres réels, $a_1, \dots, a_n, b$, l'équation :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est appelée équation linéaire à coefficients réels de n variables. La donnée de m telles équations est appelée système de m équations linéaires à coefficients réels de n variables. Une solution d'un tel système est une famille de réels $(s_1, \dots s_n)$ vérifiant chacune des équations du système.

L'intersection de droites d'un plan ou de plans de l'espace se ramène après un choix de coordonnées à la résolution de systèmes liéaires. Mais beaucoup plus largement, il en est de même d'une immense quantité de problèmes apparaissant dans une immense quantité de domaines.

Par exemple dans le domaine de l'internet : l'objectif d'un moteur de recherche sur le réseau internet consiste à partir de mots clefs à classer les pages du réseau par ordre d'importance. Une simple modélisation ramène ce problème à la résolution d'un système d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est le nombre de pages liées aux mots clefs qui peut atteindre plusieurs millions.

La majorité des phénomènes physiques, biologiques,.. sont non-linéaires, mais la résolution numérique (sur ordinateur) des équations qui les décrivent se ramènent le lus souvent à la résolution de grands systèmes linéaires. Cet outil est donc un élément majeur du calcul scientifique et son utilisation est entrée aujourd'hui dans la vie quotidienne (prévision météorologique, assimilation de données,..). Beaucoup plus largement, la majorité des calculs scientifiques se ramène à la résolution de systèmes linéaires. Les ordinateurs les plus récents et les plus puissants sont basés sur une programmation parallèle et nécessitent la mise au point de nouveaux algorithmes de résolution de systèmes linéaires utilisant au mieux cette notion de parallélisation.

En une vingtaine de pages, ce paragraphe explique une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires basée sur l'algorithme de triangulation de Gauss qui décide si un système a des solutions ou le transforme en un système triangulé ayant les mêmes solutions. Nous montrons alors comment exprimer alors ses solutions communes à l'aide des variables libres du système triangulé.

Objectif : Comprendre la méthode de résolution proposée dans le cours et pouvoir l'appliquer avec précision pour résoudre par exemple des systèmes de trois équations à quatre variables .

Les équations linéaires seront le plus souvent à coefficients réels. Mais, elles peuvent être à coefficients rationnels ou complexes. Ainsi, dans ce paragraphe, **K** désignera soit l'ensemble **Q** des nombres rationnels, l'ensemble **R** des nombres réels, ou l'ensemble **C** des nombres complexes. Il pourra désigner plus généralement un corps quelconque.

1.2 Définitions

Equation linéaire à n variables : Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ et b des éléments de K.

$$E \quad : \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

est appelée équation linéaire à n variables à coefficient dans K.

- Les $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont appelées les variables de l'équation.
- L'élément a_i est appelé le coefficient de la variable x_i.
- L'élément b est appelé le terme constant ou second membre de l'équation.
- Si $b = 0$, nous disons que l'équation est homogène ou sans second membre.

Solution d'une équation linéaire à n variables : Une solution de l'équation E est la donnée d'une famille $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de n éléments de **K** vérifiant :

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

Remarquons :

- Si tous les coefficients de l'équation E sont nuls et que le terme constant de E est nul, alors toutes données $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ est solution de E.
- Si tous les coefficients de l'équation E sont nuls et que le terme constant de E n'est pas nul, aucune donnée $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ n'est solution de (E).

Système de m équations linéaires à n variables : Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers naturels. Soit i, j des entiers naturels tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $a_{i,j}$, b_i des éléments de K.

$$E' \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right.$$

est appelé système de m équations linéaires à n variables à coefficient dans K.

Le système est dit homogène si chacune des équations linéaires qui le constitue est homogéne.

Solution d'un système de m équations linéaires à n variables : Une solution du système E' est la donnée $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de n éléments de $\mathbf{K}$ solution de chacune des équations du système E'.

Exemple : Considérons l'équation linéaire à trois variables à coefficients réels :

$$2x - y + 5z = 5 .$$

Le triplet de réels $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ est une solution de cette équation. Il y a bien d'autres solutions comme $(\frac{3}{2}, 3, 1)$.

Considérons le système de deux équations linéaires à trois variables à coefficients réels :

$$\left[\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & = & 0 & & (E_1) \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 & & (E_2) \end{array} \right. .$$

Les triplets de réels $(-2,1,1)$, $(168,-169,1)$ sont solutions de ce système et il y en a d'autres ...

Dans ces deux exemples, les variables sont nommées x, y, z. Le nom des variables importe peu, il dépend souvent de l'origine des équations. Par exemple, en géométrie dans l'espace les variables sont souvent nommées x,y et z..

1.3 Transformations d'un système sans changer les solutions

Considérons les deux équations linéaires à n variables :

$$\left[\begin{array}{rcll} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & b & (E) \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n & = & b' & (E') \end{array}\right. .$$

Nous appelons équation obtenue en multipliant E par $\lambda \in \mathbf{K}$, l'équation notée λE :

$$\lambda a_1x_1 + \lambda a_2x_2 + \cdots + \lambda a_nx_n = \lambda b \quad (\lambda E) \quad .$$

Nous appelons équation obtenue en soustrayant de l'équation E' l'équation E, l'équation notée $E' - E$:

$$(a'_1 - a_1)x_1 + (a'_2 - a_2)x_2 + \cdots + (a'_n - a_n)x_n = b' - b \quad (E' - E) \quad .$$

Nous appelons équation obtenue en ajoutant à l'équation E et l'équation E', l'équation notée $E + E'$:

$$(a'_1 + a_1)x_1 + (a'_2 + a_2)x_2 + \cdots + (a'_n + a_n)x_n = b' + b \quad (E' + E) \quad .$$

Plus généralement, pour $u, v \in \mathbf{K}$, nous notons $uE + vE'$ l'équation :

$$(ua_1 + va'_1)x_1 + (ua_2 + va'_2)x_2 + \cdots + (ua_n + va'_n)x_n = ub + vb' \quad (uE + vE') \quad .$$

et notons $uE - vE'$ l'équation :

$$(ua_1 - va'_1)x_1 + (ua_2 - va'_2)x_2 + \cdots + (ua_n - va'_n)x_n = ub - vb' \quad (uE - vE') \quad .$$

Exemple : Considérons le système de deux équations linéaires à trois variables à coefficients réels :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 & & (E_1) \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 & & (E_2) \end{array}\right. .$$

L'équation $E_2 - 2E_1$ obtenue en soustrayant $2E_1$ à E_2 est :

$$- \quad z \quad = \quad -1 \qquad (E_2 - 2E_1) \quad .$$

Remarque 1.3.1 *Soit* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *une une solution du système :*

$$\left[\begin{array}{lcll} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n & = & b & (E) \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n & = & b' & (E') \end{array}\right. .$$

Alors pour tout $u, v \in K$ *la donnée* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *est une solution de* $uE + vE'$.

Preuve : Par hypothèse :

$$\left[\begin{array}{lcll} a_1s_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ns_n & = & b & (E) \\ a'_1s_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_ns_n & = & b' & (E') \end{array}\right. .$$

Par multiplication par u et v nous obtenons :

$$\left[\begin{array}{lcl} ua_1s_1 + ua_2x_2 + \cdots + ua_ns_n & = & ub \\ va'_1s_1 + va'_2x_2 + \cdots + va'_ns_n & = & vb' \end{array}\right. .$$

Par simple addition :

$$(ua_1 + va'_1)s_1 + (ua_2 + va'_2)s_2 + \cdots + (ua_n + va'_n)s_n = ub + vb' \quad .$$

Donc, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution est une solution de $uE + vE'$.

Remarque 1.3.2 *Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, le système formé des 2 équations E et E' a les mêmes solutions que le système formé par les 2 équations E et $E' - \lambda E$.*

Preuve : a) Supposons que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système formé des 2 équations E et E'. C'est alors une solution de E. Suivant la remarque 1.3.1, c'est une solution de $E' - \lambda E$. Ainsi, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système formé des 2 équations E et $E' - \lambda E$.

b) Si $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système formé des 2 équations E et $E' - \lambda E$, c'est suivant la partie a de la preuve une solution du système formé des 2 équations E et $(E' - \lambda E) + \lambda E$. En remarquant que l'équation $(E' - \lambda E) + \lambda E$ n'est autre que l'équation E', nous avons obtenu que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est une solution du système formé des 2 équations E et E'.

Cette remarque permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 1.3.3 *Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système d'équations linéaires :*

1. *Permuter deux équations,*
2. *Multiplier une équation par un élément non nul de $\mathbf{K}$,*
3. *Soustraire d'une équation le produit d'une autre par un élément de $\mathbf{K}$,*
4. *Conserver une équation du système et soustraire aux autres équations le produit par des éléments de $\mathbf{K}$ de l'équation conservée.*
5. *Supprimer ou ajouter l'équation : $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$.*

Preuve : Les points 1,2 et 5 sont clairs. Le point 3 se déduit de la remarque 1.3.2 et le point 4 s'obtient en appliquant plusieurs fois le point 3.

Exemple : Les deux systèmes suivants ont mêmes solutions :

$$\left[\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1) \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 & (E_2) \\ 2x & + & 4y & + & 5z & = & 3 & (E_3) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x & + & y & + & z & = & 3 & (E_1) \\ & - & 3y & - & z & = & -2 & (E_2-2E_1) \\ & + & 2y & + & 3z & = & -3 & (E_3-2E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Par contre, nous prendrons garde de ne pas aller trop vite. Par exemple, le système constitué de deux équations linéaires (E, E') n'a que très rarement les mêmes solutions que le système de deux équations :

$$(E - 2E', E' - \frac{1}{2}E) \quad .$$

1.4 Les n-uplets d'éléments de K

Notation 1.4.1 *Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{K}$ *est la donnée de n éléments de* $\mathbf{K}$*. Nous notons* $\mathbf{K}^n$ *l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets d'éléments de* $\mathbf{K}$*.*

Pour $n = 1$, $\mathbf{K}^n$ n'est autre que $\mathbf{K}$. Les 2-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ sont aussi appelés couples d'éléments de $\mathbf{K}$ et les 3-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$ sont aussi appelés triplets d'éléments de $\mathbf{K}$...

Notation 1.4.2 *Nous notons $(a_1, \ldots, a_n)$ le n-uplet défini par la donnée des n élements a_1 , ..., a_n de* $\mathbf{K}$*.*

Attention que l'ordre est important $(17, 1, 2)$ et $(1, 17, 2)$ sont deux éléments distincts de $\mathbf{R}^3$.

Nous allons définir sur $\mathbf{K}^n$ deux opérations : l'addition et la multiplication par un élément de $\mathbf{K}$.

Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbf{K}^n$, $s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \in \mathbf{K}^n$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

Addition de s et s' : $\quad s + s' = (s_1, s_2, \ldots, s_n) + (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) = (s_1 + s'_1, s_2 + s'_2, \ldots, s_n + s'_n)$,

Multiplication de s par $\lambda \in \mathbf{K}$: $\quad \lambda s = \lambda(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (\lambda s_1, \lambda s_2, \ldots, \lambda s_n)$.

L'opération addition sur $\mathbf{K}^n$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\forall u,v,w\in\mathbf{K}^n & : \ (u+v)+w=u+(v+w) & , \text{ noté } \ u+v+w \quad . \\
\forall u\in\mathbf{K}^n & : \ u+0=0+u=u, & , \text{ où } \ 0=(0,0,\ldots,0) \quad . \\
\forall u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbf{K}^n & : \ u+(-u)=(-u)+u=0 & , \text{ où } \ -u=(-u_1,-u_2,\ldots,-u_n) \quad . \\
\forall u,v\in\mathbf{K}^n & : \ u+v=v+u \quad . &
\end{array}$$

L'élément $u+v+w$ désigne puique ceux sont les mêmes éléments $(u+v)+w$ ou $u+(v+w)$.

Les mathématiciens disent alors que $\mathbf{K}^n$, muni de l'addition, est un groupe commutatif de neutre l'élément $0=(0,0,\ldots,0)$. Si $u\in\mathbf{K}^n$, $-u$ est appelé l'opposé de u. Pour $u,v\in\mathbf{K}^n$, nous défnissons alors l'opération de soustraction :

$$u-v=u+(-v) \quad .$$

La multiplication par un élément de $\mathbf{K}$ vérifie :

$$\forall u\in\mathbf{K}^n \ ; \ \forall\lambda\ ,\mu\in\mathbf{K} \quad : \quad \lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u \quad \text{et} \quad 1u=u \quad .$$

Ces lois sont compatibles au sens suivant : $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{K}$, $\forall u,v\in\mathbf{K}^n$:

$$(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v \quad .$$

Nous notons que pour tout $u\in\mathbf{K}^n$: $0u=0$ (dans cette égalité, le premier 0 est le zéro de $\mathbf{K}$, le deuxième 0 est le neutre $(0,0,\ldots,0)$ de l'addition de $\mathbf{K}^n$) et nous notons que $(-1)u=-u$.

Définition 1.4.3 *(combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{K}^n$) Soit r éléments $v_1,v_2,\ldots,v_r$ de $\mathbf{K}^n$ et r éléments $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ de $\mathbf{K}$. L'élément de $\mathbf{K}^n$: $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_rv_r$ est appelé une combinaison linéaire de $v_1,v_2,\ldots,v_r$.*

Exemple 1 : Prenons, par exemple, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$.

$$4(1,2,3) - 2(-1,0,5) + \frac{3}{2}(-1,1,1) = (4+2-\frac{3}{2}, 8+0+\frac{3}{2}, 12-10+\frac{3}{2}) = (\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{7}{2})$$

est une combinaison linéaire dans $\mathbf{Q}^3$ des 3 éléments $(1,2,3)$, $(-1,0,5)$, $(-1,1,1)$.

Exemple 2 : Soit u, v, w dans $\mathbf{R}$, nous avons l'égalité dans $\mathbf{R}^3$:

$$(2u - v, u - v + 2w, 3v - w) = u(2,1,0) + v(-1,1,3) + w(0,2,-1) \quad .$$

Ainis, pour tout réels u, v, w , le triplet $(2u - v, u - v + 2w, 3v - w)$ est une combinaison linéaire des trois triplets $(2,1,0)$, $(-1,1,3)$ et $(0,2,-1)$ indépendants de u, v, w.

1.5 Systèmes triangulés d'équations linéaires

Considérons une équation linéaire à n variables :

$$E \quad : \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ou plus généralement un système de m équations linéaires à n variables :

$$E \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables sont ordonnées de la gauche vers la droite. Ainsi, x_1 est dite la première variable, x_2 est dite la deuxième variable, ... , x_n est dite n-ième variable.

Dans l'équation linéaire à 3 variables :

$$E \quad : \quad -u + 2v + 3w = 17$$

la première variable est u, la seconde v et la troisième w.

Définition 1.5.1 *(variable de tête et ordre d'une équation linéaire) Soit E une équation linéaire. Sa variable de tête est la variable par la quelle commence cette équation. L'ordre $v(E)$ de l'équation est l'ordre de la variable de tête.*

Exemple : Prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Soit l'équation linéaire de 4 variables u, v, w, t :

$$0u + 7v - \frac{1}{2}w + 4t = 9 \quad (E) \quad .$$

u est la première variable, v la deuxième, w la trosième et t la quatrième. La variable de tête de E est la deuxième variable v. Ainsi, l'équation E est d'ordre 2 : $v(E) = 2$.

Prendre garde que pour parler d'ordre d'une équation linéaire, il faut que l'un de ses coefficients soit non nul.

Définition 1.5.2 *Considérons le système de m équations linéaires à n variables :*

$$\left[\begin{array}{rclc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array}\right.$$

où les coefficients des variables de chaque équation ne sont pas tous nuls. Ce système est dit ordonné si l'ordre de ses équations est croissant au sens large : $v(E_1) \leq v(E_2) \leq \ldots \leq v(E_m)$. Il est dit triangulé si l'ordre de ces équations est croissant au sens strict : $v(E_1) < v(E_2) < \ldots < v(E_m)$.

Si le systéme constitué des équations $E_1, \ldots, E_m$ à n variables est triangulé : $v(E_1) < v(E_2) < \ldots < v(E_m)$. L'ordre d'une équation étant un entier plus grand que 1 et inférieur à n, nous en déduisons : $m \leq v(E_m) \leq n$.

Il en résulte qu'un système triangulé a necessairement moins d'équations que de variables.

Exemple : Considérons le système :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 1 & (E_1) \\ & & 3y & + & 2z & = & 2 & (E_2) \\ & & & - & 4z & = & 9 & (E_3) \end{array}\right. .$$

On a $v(E_1) < v(E_2) < v(E_3)$. Le système est donc triangulé.

1.6 Algorithme de Gauss de triangulation d'un système

On se propose maintenant de donner un algorithme que nous appellerons "algorithme de triangulation de Gauss" concluant qu'un système d'équations linéaires E n'a pas de solution ou donnant un système d'équations linéaires triangulé ayant les mêmes solutions que E.

Commençons par deux cas particuliers. Tout d'abord celui d'un système réduit à une seule équation linéaire

$$E \quad : \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \ .$$

- Si tous les coefficients a_i sont nuls et que b est nul, tout élément de $\mathbf{K}^n$ est solution.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls et que b est non nul, l'équation n'a pas de solution.
- Si l'un des coefficients est non nul le système est triangulé.

Puis, considérons le systéme de deux équations d'orde k de n variables :

$$E \quad \left[\begin{array}{cccccccccccccc} 0x_1 & + & \cdots & + & 0x_{k-1} & + & a_kx_k & + & a_{k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & a_nx_n & = & a & (E_1) \\ 0x_1 & + & \cdots & + & 0x_{k-1} & + & b_kx_k & + & b_{k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & b_nx_n & = & b & (E_2) \end{array}\right. ,$$

où a_k et b_k sont non nuls. Suivant la proposition 1.3.3, ce systéme a les mêmes solutions que le système suivant :

$$
E' \quad \left[\begin{array}{cccccccccccccc} 0x_1 & + & \cdots & + & 0x_{k-1} & + & a_k x_k & + & a_{k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & a_n x_n & = & a & (E_1) \\ 0x_1 & + & \cdots & + & 0x_{k-1} & + & 0x_k & + & b'_{k+1}x_{k+1} & + & \cdots & + & b'_n x_n & = & b' & (E'_2 = E_2 - \dfrac{b_k}{a_k}E_1) \end{array} \right. ,
$$

où

$$
b'_{k+1} = b_{k+1} - \frac{b_k}{a_k}a_{k+1} \quad , \quad ... \quad , \quad b'_n = b_n - \frac{b_k}{a_k}a_n \quad , \quad b' = b - \frac{b_k}{a_k}a \quad .
$$

Si les b'_{k+1} .... b'_n sont tous non nuls, le système E' est triangulé. **Nous dirons que nous avons utilisé E_1 pour faire monter l'ordre de E_2.**

Expliquons l'algorithme de triangulation de Gauss dans le cas général. Il part d'un système de m équations linéaires à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$:

$$
E \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. .
$$

Principe d'un pas de l'algorithme :

Sans en changer les solutions, on peut supposer que notre système E ne contient pas d'équation triviale $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$. Sinon, on enlève ces équations triviales, ce qui ne modifie pas les solutions de E (proposition 1.3.3).

Si le système E contient une équation du type $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ avec $b \neq 0$. Comme un telle équation n'a pas de solution, nous concluons que le système E n'a pas de solution.

Sinon quitte à permuter les équations, nous obtenons suivant la proposition 1.3.3 un sytème ordonné qui a les mêmes solutions que le système de départ. Soit alors $E_1, \ldots, E_m$ les équations de ce système. Soit $1 \leq k(E)$, le plus grand des indices $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tels que

$$v(E_1) < v(E_2) < \cdots < v(E_k) \leq v(E_{k+1}) \leq \cdots \leq v(E_m) \quad .$$

Autrement dit, $k(E)$ est l'ordre à partir duquel les équations du système E ne sont plus croissants au sens strict. Le principe est alors d'utiliser E_k pour faire monter l'ordre des des équations suivantes sans changer les solutions du système suivant le principe précédent.

Il reste à itérer.

Proposition 1.6.1 *Soit E un système linéaire de m équations à n variables. En moins de $n-1$ étapes, l'algorithme de triangulation de Gauss montre que E n'a pas de solution ou permet de construire un système triangulé ayant les mêmes solutions que E.*

Exemple : Considérons le système suivant :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} a & - & b & & & = & 0 & & (E_1) \\ 2a & + & b & - & c & = & 2 & & (E_2) \\ 2a & & & + & c & = & 3 & & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables ordonnées sont a, b, c. Ce système est ordonné : $v(E_1) = v(E_2) = v(E_3) = 1$.
O Étape 1 : Faisons tourner l'algorithme de Gauss. Nous obtenons le système E' qui a la même solution que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} a & - & b & & & = & 0 & & (E'_1 = E_1) \\ & & 3b & - & c & = & 2 & & (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & & 2b & + & c & = & 3 & & (E'_3 = E_3 - 2E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est ordonné, mais toujours pas triangulé : $v(E'_1) = 1 < v(E'_2) = v(E'_3) = 2$.

Étape 2 : Faisons tourner l'algorithme de Gauss en utilisant E'_2 pour faire monter l'ordre de E'_3 . Nous obtenons le système (E'') qui a même solution que (E) :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccc} a & - & b & & & = & 0 & \quad (E''_1 = E_1) \\ & & 3b & - & c & = & 2 & \quad (E''_2 = E'_2) \\ & & & & \frac{5}{3}c & = & \frac{5}{3} & \quad (E''_3 = E'_3 - \frac{2}{3}E'_2)) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est triangulé $v(E''_1) < v(E''_2) < v(E''_3)$. Fin de l'algorithme.

En anticipant sur la section suivante et en remontant les équations, nous obtenons que $(1,1,1)$ est la seule solution de ce système.

1.7 Algorithme de résolution d'un système triangulé d'équations linéaires

Pour résoudre un système d'équations linéaires, l'algorithme de Gauss nous ramène à savoir résoudre un système triangulé. Cette question fait l'objet de ce sous-paragraphe.

Définition 1.7.1 *(variables libres) Nous appelons variables libres d'un système triangulé d'équations linéaires les variables qui ne sont pas les variables de tête d'une équation de ce système.*

Nous ne parlerons donc jamais de variables libres d'un système non triangulé d'équations linéaires.

Exemple : Prenons par exemple $K = \mathbf{R}$ et considérons le système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 & (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 & (E_2) \\ & & & & & & 4t & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables sont x, y, z, t ordonnées dans cet ordre. Ce système est triangulé : $v(E_1) = 1$, $v(E_2) = 2$ et $v(E_3) = 4$. La variable x est variable de tête de la première équation, y de la seconde et t de la troisième.

Ainsi, le système admet z comme seule variable libre.

Algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires triangulé : Nous exprimons la variable de tête de la dernière équation à l'aide des variables libres contenues dans cette équation, Nous remplaçons ensuite cette variable de tête par son expression dans les équations restantes et obtenons alors un système triangulé avec une équation de moins. Il reste à itérer. Nous paramètrons ainsi les solutions d'un système linéaire triangulé à l'aide de ses variables libres.

Exemple : Expliquons la méthode en détail sur l'exemple précédent :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 \\ & & & & & & 4t & = & 2 \end{array} \right. \quad .$$

Rappelons que ce système est triangulé de seule variable libre z. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ une solution de E, la dernière équation donne : $t = \dfrac{1}{2}$. Le quadruplet (x, y, z, t) est donc solution de E si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 & (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 & (E_2) \end{array} \right. \quad .$$

En remplaçant t par $\dfrac{1}{2}$ dans (E_1) et (E_2), nous obtenons que le quadruplet (x, y, z, t) est solution de E si et seulement si :

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{ccccccc} 5x & + & 2y & + & z & = & -\frac{1}{2} \\ & & y & + & z & = & \frac{3}{2} \end{array} \right. \quad .$$

Nous en déduisons y en fonction de la variable libre z. $y = \dfrac{3}{2} - z$. Le quadruplet (x, y, z, t) est donc solution de E si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{array}{lcl} 5x + 2y + z & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad .$$

En remplaçant y par $\frac{3}{2} - z$, on obtient que le triplet (x, y, z, t) est solution de E si et seulement si :

$$\left[\begin{array}{lcl} y & = & \frac{3}{2} - z \\ t & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left[\begin{array}{lcl} 5x - z & = & -\frac{7}{2} \end{array}\right. \qquad .$$

La variable de tête x s'exprime facilement à l'aide de z : $x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z$. Nous obtenons ainsi que le quadruplet (x, y, z, t) est solution de E si et seulement si :

$$x = -\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z \quad , \quad y = \frac{3}{2} - z \quad , \quad t = \frac{1}{2} \quad .$$

Appelons S l'ensemble des solutions du système. Nous avons obtenu :

$$S = \{(-\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z, \frac{3}{2} - z, z, \frac{1}{2}) \text{ tel que } z \in \mathbf{R}\} = \{(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) + z(\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \text{ tel que } z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous disons que nous avons paramètré les solutions du système à l'aide de z : à chaque valeur de $z \in \mathbf{R}$ correspond une solution du système. Par exemple $z = 0$, nous donne la solution particulière $(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Notation 1.7.2 *Soit I un ensemble fini et $(b_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments b_i de $\mathbf{K}$. Nous noterons : $\sum_{i \in I} b_i$, la somme de tous les éléments de la famille $(b_i)_{i \in I}$. En particulier si $I = \{1, \ldots, n\}$:*

$$\sum_{i \in \{1, \ldots, n\}} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \quad .$$

Ce dernier élément est aussi noté : $\sum_{i=1}^{n} b_i$.

Enonçons le résultat obtenu qui permet d'exprimer les solutions d'un système triangulé à l'aide de ses variables libres.

Proposition 1.7.3 *Considérons un système triangulé E de m équations lináires de n variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit $I \subset \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices des variables libres de ce système. Alors, il existe pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ des u_i dans $\mathbf{K}$ nuls pour $i \in I$ et il existe pour tout $i \in I$ et tout entier tel que $j < i$ des $u_{i,j} \in \mathbf{K}$ nuls pour $j \in I$ tels que l'ensemble des solutions de E soit :*

$$S = \{(u_1, \ldots, u_n) + \sum_{i \in I} x_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,i-1}, 1, 0, \ldots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Exemple suite : Dans l'exemple du système triangulé suivant :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & 2y & + & z & + & t & = & 0 \quad (E_1) \\ & & y & + & z & - & t & = & 1 \quad (E_2) \\ & & & & & & 4t & = & 2 \quad (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables sont x, y, z, t ordonnées dans cet ordre. La troisième variable est la seule variable libre. En suivant notre algorithme, nous avons obtenu que l'ensemble S des solutions du système est :

$$S = \{(-\frac{7}{10} + \frac{1}{5}z, \frac{3}{2} - z, z, \frac{1}{2}) \text{ tels que } z \in \mathbf{R}\} = \{(-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) + z(\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \text{ tels que } z \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Avec les notations de la proposition **??** : $n = 4$ et $I = \{3\}$ et

$$(u_1, \ldots, 4) = (-\frac{7}{10}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad (u_{3,1}, u_{3,2}) = (\frac{1}{5}, -1, 1, 0) \quad .$$

Conséquence : Un système triangulé a toujours au moins une solution. Il a une unique solution si aucune variable de ce système n'est libre ce qui revient à dire que toutes ses variables sont des variables de tête ou encore que notre système triangulé a autant d'équations que d'inconnues.

1.8 Synthèse : Résolution des systèmes d'équations linéaires

Considérons un système de m équations linéaires à n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$:

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

Définition 1.8.1 *Nous appelons système homogène associé à E le système d'équations linéaires homogènes obtenu en remplaçant par zéro les seconds membres des équations E_i définissant E.*

Nous pouvons noter au passage qu'un système d'équations linéaires est homogène si et seulement s'il admet $(0,\dots,0)$ comme solution.

Résolution de E : L'algorithme de Gauss montre que le système E n'a pas de solution ou détermine un système triangulé ayant les mêmes solutions. Dans ce dernier cas, soit $I \subset \{1,\dots,n\}$ l'ensemble des indices des variables libres de ce système triangulé. Alors, il existe pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,n\}$ des u_i dans $\mathbf{K}$ nuls pour $i \in I$ et il existe pour tout $i \in I$ et tout entier tel que $j < i$ des $u_{i,j} \in \mathbf{K}$ nuls pour $j \in I$ tels que l'ensemble des solutions de E soit :

$$S = \{(u_1,\dots,u_n) + \sum_{i\in I} x_i(u_{i,1},\dots,u_{i,i-1},1,0,\dots,0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Remarque 1.8.2 *Avec ces notations, $(u_1,\dots,u_n)$ est une solution de E et*

$$\sum_{i\in I} x_i(u_{i,1},\dots,u_{i,i-1},1,0,\dots,0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\}$$

est l'ensemble des solutions du système homogène associé à E.

Cette remarque 1.8.2 résulte du lemme suivant :

Lemme 1.8.3 *Soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ une solution d'un système E d'équations linéaires à n variables. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *est solution de E.*
2. $x - u = (x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n)$ *est solution du système homogène associé à E.*

Preuve : Par hypothèse :

$$\left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \cdots + a_{1,n}u_n & = & b_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \cdots + a_{2,n}u_n & = & b_2 \\ & & \\ a_{m,1}u_1 + a_{m,2}u_2 + \cdots + a_{m,n}u_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Supposons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est solution de E. Nous avons alors :

$$\left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

Nous obtenons par différrences :

$$\left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 - u_1) + a_{1,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{1,n}(x_n - u_n) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1 - u_1) + a_{2,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{2,n}(x_n - u_n) & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}(x_1 - u_1) + a_{m,2}(x_2 - u_2) + \cdots + a_{m,n}(x_n - u_n) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Donc, $x - u = (x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n)$ est solution du système homogène associé à E.

Inversement, $x - u = (x_1 - u_1, \ldots, x_n - u_n)$ est solution du système homogène associé à E :

$$\left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}(x_1-u_1)+a_{1,2}(x_2-u_2)+\cdots+a_{1,n}(x_n-u_n) & = & 0 \\ a_{2,1}(x_1-u_1)+a_{2,2}(x_2-u_2)+\cdots+a_{2,n}(x_n-u_n) & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}(x_1-u_1)+a_{m,2}(x_2-u_2)+\cdots+a_{m,n}(x_n-u_n) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Par addition, compte tenu des équations vérifiées par $(u_1,\ldots,u_n)$, nous obtenons :

$$\left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\cdots+a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. .$$

et $x=(x_1,\ldots,x_n)$ est solution de E.

Exemple : Travaillons avec $\mathbf{K}=\mathbf{R}$. Résolvons le système :

$$(E)\quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Ce systéme est ordonné. Appliquons l'algorithme de Gauss de triangulation :

$$(E')\quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & -\frac{1}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & = & \frac{3}{2} & (E_2-\frac{1}{2}E_1) \end{array}\right. .$$

L'algorithme de Gauss a abouti en une étape puisque ce système est triangulé. Arrangeons un peu E' en multipliant sa deuxième équation par -2. On obtient le système triangulé (E'') ayant les mêmes solutions que E :

$$(E'')\quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -3 & (E_2-\frac{1}{2}E_1) \end{array}\right. .$$

Les variables libres sont x_3 et x_4. La dernière équation donne :

$$x_2 = -3 - 3x_3 - 3x_4 \quad .$$

Reportons dans l'équation restante, nous obtenons :

$$2x_1 + 3\,(3 - 3x_3 - 3x_4) + x_3 + x_4 = 1 \;\text{, soit}\quad 2x_1 - 8x_3 - 8x_4 = 10 \quad .$$

D'où :

$$x_1 = 4x_3 + 4x_4 + 5 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{(4x_3 + 4x_4 + 5, -3 - 3x_3 - 3x_4, x_3, x_4) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(5, -3, 0, 0) + x_3(4, -3, 1, 0) + x_4(4, -3, 0, 1) \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Dans cet exemple avec les notations de la proposition 1.7.3 : $I = \{3, 4\}$ et

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) = (5, -3, 0, 0) \quad , \quad (u_{3,1}, u_{3,2}, u_{3,3}, u_{3,4}) = (4, -3, 1, 0) \quad , \quad (u_{4,1}, u_{4,2}, u_{4,3}, u_{4,4}) = (4, -3, 0, 1)\ .$$

En guise de vérification, nous pouvons observer que $(5, -3, 0, 0)$ est solution du système (E) et que les éléments $(4, -3, 1, 0)$ et $(4, -3, 0, 1)$ sont solutions du système homogène asocié à E :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

2 Matrices à coefficients dans un corps

2.1 Introduction

Une matrice par exemple à coefficients réels de n lignes et p colonnes est un tableau constitué de n lignes formées de p réels. L'ensemble de ces matrices est muni de deux opérations naturelles : addition et multiplication par un réel. Nous définissons de plus le produit "ligne-colonne" qui permet de multiplier une matrice n lignes et p colonnes par une matrice p lignes et m colonnes. L'intérêt de ces trois opérations provient de leurs nombreuses propriétés et de leurs compatibilités.

Les matrices n lignes et n colonnes ou matrie carrées de taille n sont en particiler mmunis de trois opérations : addition et multiplication par un réel et produit "ligne-colonne". Ce dernier produit est associatif et possède un élément neutre. Les matrices carrées qui admettent un inverse pour cette multiplication sont dites inversibles.

A toute matrice carrée, il est possible d'associer un réel appelé déterminant de la matrice et dont la non nullité caractérise son inversibilité. Les déterminants permettent de calculer la comatrice d'une matrice et ainsi d'exprimer l'inverse d'une matrice. Nous détaillons cette théorie dans le cas des matrices de tailles deux et trois.

Les matrices codent les systèmes d'équations linéaires et ce codage est à la source du produit "ligne-colonne". Il existe plus précisement une correspondance entre système d'équations linéaires et équation matricielle que nous expliquons dans le dernier paragraphe.

Objectif :

1. Savoir multiplier des matrices et pratiquer le yoga des opérations sur les matrices.
2. Savoir calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2 ou 3 par les deux méthodes.
3. Savoir passer d'un système d'équations linéaires à une équation matricielle et inversement.

4. Savoir résoudre matriciellement un systéme linéaire de n équations à n inconnues quand la matrice associée à ce système est inversible.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

2.2 Définitions

Définition 2.2.1 *Soit n et p deux entiers naturels. Une matrice $n \times p$ à coefficients dans K est la donnée d'une famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ de np éléments de $\mathbf{K}$.*

Elle est représentée par le tableau à n lignes et p colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

L'élément $a_{i,j}$ de $\mathbf{K}$ est le terme de sa i-ème ligne et j-ème colonne. Cette matrice est notée aussi $M = (a_{i,j})$ et dite matrice de terme général $a_{i,j}$. Nous disons aussi que la matrice M est une matrice à n lignes et p colonnes.

Notation 2.2.2 *Nous notons $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.*

Soit $a_1, \dots, a_p \in \mathbf{K}$, la matrice $(a_1\, a_2\, \dots\, a_p) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ est appelée matrice ligne.

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$, la matrice : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est appelée matrice colonne.

On note 0 la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Notation 2.2.3 *Nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes. Ces matrices sont également appelées matrices carrées de taille n.*

Soit $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée de taille n. Les coefficients $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux de cette matrice.

La matrice M est dite diagonale si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$: $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

La matrice M est dite triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$: $M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

La matrice M est dite triangulaire supérieure stricte si $a_{i,j} = 0$ pour $i \geq j$: $M = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & & & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & & a_{2,n} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & a_{n-1,n} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

Nous définissons de même les matrices triangulaires inférieures.

Enfin, nous notons $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Trois opérations sur les matrices à coefficients dans K :

Addition de deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $N = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. La somme de M et N est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont le terme général est $a_{i,j} + b_{i,j}$. Elle est notée $M + N$. Ainsi :

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & bb_{1,p} \\ & & \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \dots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Multiplication d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par un élément de K : Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, le produit de M par λ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont le terme général est $\lambda a_{i,j}$. Elle est notée λM. Ainsi :

$$\lambda M = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p} \\ & & \\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Nous notons $-M$ la matrice $(-1)M$, ou encore la matrice de terme général $-a_{i,j}$:

$$-M = \begin{pmatrix} -a_{1,1} & \dots & -a_{1,p} \\ & & \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Ces deux premières opérations vérifient :

1. : Pour tout $M, N, P \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:

$$\begin{array}{ll} (M+N)+P=(M+N)+P & \text{associativité ,} \\ M+N=N+P & \text{commutativité ,} \\ M+0=0+M=M & \text{0 est élément neutre ,} \\ M+(-M)=(-M)+M=0 & \text{existence d'un opposé .} \end{array}$$

2. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$:

$$\begin{array}{l} \lambda(\mu M)=(\lambda\mu)M \ , \\ \lambda(M+N)=\lambda M+\lambda N \ , \\ (\lambda+\mu)M=\lambda M+\mu M \ , \\ 1.M=M \ . \end{array}$$

Nous disons alors que addition est une loi de groupe commutatif sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et que munis de la somme de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un élément de $\mathbf{K}$, l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Soit $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, nous notons $M-N=M+(-N)$.

Produit "ligne-colonne" d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$: Nous allons définir une opération qui associera à $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ une matrice notée $MN \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ et appelée produit de M par N, et donc définir l'application :

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K}) \quad ; \quad (M,N) \mapsto MN \quad .$$

Commençons par définir le produit d'une matrice ligne à p termes par une matrice colonne à p termes, c'est à dire d'une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ par une matrice $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Ce produit est défini par l'application :

$$L = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_p) \quad , \quad C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \quad , \quad LC = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p \quad .$$

Le produit de $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ est alors la matrice MN dont le terme plaçé à la i-ème ligne et j-ème colonne est $L_i C_j$ produit de la i-ème ligne de M par la j-ème colonne de N :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,p} \\ & & \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,p} \end{pmatrix} \quad , \quad MN = \begin{pmatrix} L_1 C_1 & \ldots & L_1 C_q \\ L_2 C_1 & \ldots & L_2 C_q \\ & & \\ L_n C_1 & \ldots & L_n C_q \end{pmatrix} \quad .$$

où $L_i = (a_{i,1}\, a_{i,2}\, \ldots\, a_{i,p})$ est la i-ème ligne de M et $C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de N.

Le produit matriciel est ainsi appelé produit "ligne-colonne".

Notons que le terme plaçé à la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice $MN \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ est : $L_i C_j = \sum_{k=1}^{k=p} a_{i,k} b_{k,j}$. Cette formule est utile pour les démonstrations où apparaissent des produits de matrices.

Proposition 2.2.4 *Si les formules suivantes ont un sens, nous avons les égalités entre matrices :*

$$\begin{array}{lll}
(MN)P = M(NP) & \text{noté : } MNP & , \\
M(N+P) = MN + MP & & , \\
(\lambda M)N = M(\lambda N) = \lambda(MN) & \text{noté : } \lambda MN & , \\
(M+N)P = MP + NP & & , \\
I_n M = M I_p = M & \text{pour tout } M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) & .
\end{array}$$

Transposition : Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est une matrice de terme général $(a_{i,j})$. Nous appelons transposée de M la matrice notée ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ de terme général $(a_{j,i})$. Autrement dit, la i-ème ligne de ${}^tM$ est la j-ème colonne de M et la j-ème colonne de ${}^tM$ est la i-ème ligne de M.

Exemple : $${}^t\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Proposition 2.2.5 *Soit $\lambda \in \mathbf{K}$, $M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, dès qu'elles ont un sens, nous avons les égalités :*

$$\begin{array}{lll}
{}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN & , & {}^t(\lambda M) = \lambda({}^tM) \ , \\
{}^t(MN) = ({}^tN)\,({}^tM) & , & {}^t({}^tM) = M \ .
\end{array}$$

Preuve : Laissée au lecteur. La formule ${}^t(MN) = ({}^tN)\,({}^tM)$ s'établit facilement après l'avoir vérifié dans le cas où M est une matrice ligne et N une matrice colonne de même longueur.

Définition 2.2.6 *Une matrice carrée est dite symétrique si elle est égale à sa transposée.*

Par exemple, la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est symétrique : ${}^tI_n = I_n$.

L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées :

Comme le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est muni en particulier de deux opérations : l'addition et le produit matriciel. Muni de l'addition, nous avons vu que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un groupe commutatif. Mais, nous avons de plus :

a) La multiplication est associatice :

$$\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad (MN)P = M(NP) \ ,$$

b) Elle est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad M(N+P) = MN + MP \quad \text{et} \quad (M+N)P = MP + NP \ ,$$

c) La multiplication admet I_n comme élément neutre :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad I_n M = M I_n = M \ .$$

Nous résumons toutes ces propriétés en disant que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un anneau unitaire. Nous remarquons qu'en général si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ avec $n \geq 1$: $MN \neq NM$.

Notation 2.2.7 *Pour tout entier n, nous notons M^n le produit n fois de M par elle même. Par convention, M^0 sera I_n la matrice identié.*

2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 2.3.1 *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible, s'il existe N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $MN = NM = I_n$. La matrice N est alors unique, appelée inverse de M et notée M^{-1}.*

Montrons pour être complet l'unicité de l'inverse. Supposons M inversible. Soient N' et N'' sont deux inverses de M. Par définition : $MN'' = I_n$ et $N'M = I_n$. Par associativité du produit matriciel, nous avons :

$$(N'M)N'' = N'(MN'') .$$

Il en résulte :

$$I_nN'' = N'I_n \quad \text{et donc} \quad N'' = N' \quad .$$

Notation 2.3.2 *Nous noterons* $\mathrm{Gl}_n(\mathbf{K})$ *l'ensemble des matrices inversibles* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Proposition 2.3.3

1. *La matrice* I_n *est inversible d'inverse* I_n.
2. *Si* M *et* N *sont deux matrices carrées inversibles, la matrice produit* MN *est inversible et l'inverse de* MN *est :*
$$(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1} \quad .$$
3. *Si* M *est une matrice carrée inversible, son inverse* M^{-1} *est inversible et l'inverse de* M^{-1} *est :*
$$(M^{-1})^{-1} = M \quad .$$
4. *Si* M *est une matrice carrée inversible, sa transposée* ${}^tM$ *est inversible et l'inverse de* ${}^tM$ *est :*
$$({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1}) \quad .$$

Preuve : 1) Cela résulte de l'identité $I_nI_n = I_nI_n = I_n$.

2) Soit M et N deux matrices carrées inversibles. Nous avons toujours grâce à l'associativité de la multiplication matricielle :

$$MN(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MI_nM^{-1} = MM^{-1} = I_n$$

et

$$(N^{-1}M^{-1})MN = N^{-1}(M^{-1}M)N = N^{-1}I_nN = N^{-1}N = I_n \quad .$$

Ainsi, MN est inversible d'inverse $N^{-1}M^{-1}$.

3) Soit M une matrice carrée inversible. Par définition de l'inversibilité de M, nous avons :

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I_n \quad .$$

Cela implique que M^{-1} est inversible d'inverse M.

4) Soit M une matrice carrée inversible. En utilisant la formule sur la transposée d'une multiplication donnée dans la proposition 2.2.5, nous obtenons :

$${}^t(M^{-1}){}^tM = {}^t(MM^{-1}) = {}^t(I_n) = I_n \quad .$$

De même, on montre ${}^tM\,{}^t(M^{-1}) = I_n$. Ainsi, ${}^tM$ est inversible d'inverse ${}^t(M^{-1})$.

2.4 Matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ et de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$

Définition 2.4.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. *Nous appelons déterminant de* A *et on note* $\det(A)$ *l'élément de* K *défini par* $\det(A) = ad - bc$.

Proposition 2.4.2 *Pour tout* $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *:*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \quad , \quad \det(I_2) = 1 \quad , \quad \det({}^tA) = \det(A) \quad .$$

Preuve : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$. On a : $AB = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= (aa' + cb')(bc' + dd') - (ba' + db')(ac' + cd') \\
&= aba'c' + ada'd' + bcb'c' + cdb'd' - aba'c' - bca'd' - adb'c' - cdb'd' \\
&= ada'd' + bcb'c' - bcc'd' - adb'c' = ad(a'd' - b'c') + bc(b'c' - a'd') \\
&= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') = (ad - bc)(a'd' - b'c') = \det(A)\det(B)
\end{aligned}$$

De même, $\det(BA) = \det(B)\det(A)$. Comme $\det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$, nous obtenons bien :

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \ .$$

Les égalités $\det(I_2) = 1$ et $\det({}^tA) = \det(A)$ résultent de deux calculs directs faciles.

Proposition 2.4.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. *La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Nous avons alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : Soit $a, b, c, d \in \mathbf{K}$. Par un calcul direct de produits matriciels :

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2 \quad .$$

Si $\det(A) = 0$ et A inversible, nous obtenons en multipliant à gauche l'identité matricielle $*$ par A^{-1} :

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = A^{-1}(\det(A)I_2) = 0 \quad .$$

Comme $A^{-1}A = I_2$, nous obtiendrons :

$$\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = 0$$

Il en résulterait $A = 0$. d'où : $0 = A^{-1}A = I_2$ qui est impossible.

Si $\det(A) \neq 0$, nous obtenons en multipliant l'identité matricielle $*$ par l'inverse de $\det(A)$:

$$\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2 \quad .$$

En utilisant la propriété générale $(\lambda M)N = M(\lambda N) = \lambda(MN)$ donnée dans la proposition 2.2.4 :

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\right)A = I_2 \quad .$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad .$$

Définition 2.4.4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *On appelle mineur du coefficient* $a_{i,j}$ *de la* i *ème ligne et* j *ème colonne de* A *le déterminant* $\Delta_{i,j}$ *de la matrice carrée de* $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ *obtenue en enlevant à* M *sa* i*-ème ligne et sa* j*-ème colonne.*

Définition 2.4.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *On appelle déterminant de* A *et on note* $\det(A)$ *l'élément de* K *défini par :*

$$\det(A) \quad = \quad a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{2,1}\Delta_{2,1} + a_{3,1}\Delta_{3,1} \quad .$$

Cette formule est dite l'expression du développement du déterminant de A par rapport à la premère colonne de A.

Le déterminant de A est également donné par les formules:

Développement du déterminant de A par rapport à la deuxième colonne de A.

$$\det(A) \quad = \quad -a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{2,2}\Delta_{2,2} - a_{3,2}\Delta_{3,2} \quad .$$

Développement du déterminant de A par rapport à la troisième colonne de A.

$$\det(A) \quad = \quad a_{1,3}\Delta_{1,1} - a_{2,3}\Delta_{2,1} + a_{3,3}\Delta_{3,1} \quad .$$

Développement du déterminant de A par rapport à la premère ligne de A.

$$\det(A) \quad = \quad a_{1,1}\Delta_{1,1} - a_{1,2}\Delta_{1,2} + a_{1,3}\Delta_{1,3} \quad .$$

Développement du déterminant de A par rapport à la deuxième ligne de A.

$$\det(A) \quad = \quad a_{2,1}\Delta_{2,1} - a_{2,2}\Delta_{2,2} + a_{2,3}\Delta_{2,3} \quad .$$

Développement du déterminant de A par rapport à la troisième ligne de A.

$$\det(A) \quad = \quad a_{3,1}\Delta_{3,1} - a_{3,2}\Delta_{3,2} + a_{3,3}\Delta_{3,3} \quad .$$

Dans ces formules, nous pouvons noter que le signe devant $a_{i,j}$ est le signe de $(-1)^{i+j}$ et remarquer que la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ de terme général $(-1)^{i+j}$ est

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Proposition 2.4.6 *Pour tout* $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ *:*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B) \quad , \quad \det(I_2) = 1 \quad , \quad \det({}^tA) = \det(A) \quad .$$

Preuve : Ces preuves peuvent se faire par un calcul direct comme dans la preuve de la proposition 2.4.2.

Proposition 2.4.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$. *La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *On a alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t(\mathrm{Com}(A))$$

où $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ *est la matrice de terme général* $((-1)^{i+j}\Delta_{i,j})$ *et* ${}^t(\mathrm{Com}(A))$ *sa transposée.*

Preuve : La proposition résulte des identités matricielles :

$$A\,{}^t(\mathrm{Com}(A)) = {}^t(\mathrm{Com}(A))\,A = \det(A)\,I_3$$

qui proviennent des différentes formules de développement du déterminant.

Ainsi, avec les notations de la proposition 2.4.7 si $\det(A) \neq 0$:

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & -\Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ -\Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & -\Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & -\Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & -\Delta_{2,1} & \Delta_{3,1} \\ -\Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & -\Delta_{3,2} \\ \Delta_{1,3} & -\Delta_{2,3} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}$$

Enfin, le lecteur pourra alors montrer :

Proposition 2.4.8 *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ ou de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$.*

1. *Si M possède une ligne de zéro,* $\det(M) = 0$.
2. *Si M est triangulaire,* $\det(M)$ *est le produit des éléments de sa diagonale.*
3. *Pour $i \neq j$, si M' est la matrice déduite de M en ajoutant à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes :* $\det(M') = \det(M)$.
4. *Pour $a \in \mathbf{K}$, si M' est la matrice déduite de M en en multipliant la i-ème ligne de M par a sans changer les autres lignes :* $\det(M') = a\det(M)$.
5. *Pour $i \neq j$, si M' est la matrice déduite de M en permutant la i-ème ligne de M et la i-ème ligne de M sans changer les autres :* $\det(M') = -\det(M)$.
6. *Mêmes énoncés avec les colonnes.*

2.5 Matrices et résolution de systèmes linéaires

Soit $a_{i,j}$, $b_i \in \mathbf{K}$. Considérons le système linéaire de m équations à n inconnues.

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 & (E_2) \\ & & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m & (E_m) \end{array} \right. \quad .$$

Nous avons alors : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est solution de E si et seulement si la matrice colonne : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie :

$$(E') \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \quad .$$

Cette remarque résulte de la définition du produit "ligne-colonne". Ainsi, un système d'équations linéaires correspond à une équation matricielle. Dans la pratique, nous ne distinguons pas toujours le système d'équations linéaires et l'égalité matricielle associée.

La matrice A est appelée matrice associé au système E.

Proposition 2.5.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée inversible et $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{K}$. Le système d'équations linéaires associé à l'équation $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ admet comme unique solution :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Preuve : Supposons $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution de notre système, nous avons alors l'identité matricielle :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Multiplions cette identité par la matrice inverse de A, nous obtenons :

$$A^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Comme tenu que le produit de A^{-1} par A est l'identité, nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Inversement si $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifie cette identité, il suffit de multiplier cette identité par A pour établir que $(x_1, \ldots, x_n)$ une solution de notre système.

Cas particulier n=2 : Considérons le système de deux équations linéaires à deux variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{lcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 & = & b_2 & (E_2) \end{array} \right. .$$

La matrice associée à ce système est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} .$$

Si A est inversible, suivant le calcul de A^{-1} donné dans la proposition 2.4.3, l'unique solution de E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne :

$$b_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}} \quad , \quad b_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}} \quad .$$

Cas particulier n=3 : Considérons le système de trois équations linéaires à trois variables :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 & = & b_1 & (E_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 & = & b_2 & (E_2) \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 & = & b_3 & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

La matrice associée à ce système est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad .$$

Si A est inversible, suivant le calcul de A^{-1} donné dans la proposition 2.4.7, l'unique solution de E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3} & -(a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{1,3}) & a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \\ -(a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,3}) & a_{1,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{1,3} & -(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3}) \\ a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2} & -(a_{1,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{1,2}) & a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Le calcul donne :

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} \quad , \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_2 & a_{3,3} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} \quad , \quad x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}} \quad .$$

Exemple : Résoudre le système d'équations linéaires à coefficients réels.

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcll} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 & (E_1) \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 & (E_3) \end{array}\right. \quad .$$

Ce systéme équivaut à l'égalité matricielle :

$$(E') \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Le déterminant de A est -2. Ainsi la matrice A est inversible et notre système de 3 équations à 3 inconnues admet donc une unique solution. Suivant la proposition 2.4.7, nous obtenons :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, l'unique solution du système E est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

3 Espaces vectoriels

3.1 Introduction

Un **K**-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi d'addition qui permet d'ajouter deux éléments de E (appelés vecteurs) et d'une multiplication qui permet de multiplier un élément de E par un élément de **K** (appelé scalaire). Autrement dit, un espace vectoriel est un espace dans lequel on peut faire des combinaisons linéaires : si $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$, le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$ a un sens et appelé une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Soit E un **K**-espace vectoriel. Une famille $u_1, \dots, u_p$ de vecteurs de E est dite libre, si la seule combinaison linéaire nulle de $u_1, \dots, u_p$ est la combinaison $0u_1 + \cdots + 0u_p$. Elle est dite génératrice, si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$. La famille $u_1, \dots, u_p$ est une base, si c'est une famille libre et génératrice. Dans ce cas, tout vecteur u de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la famille $(u_1, \dots, u_p)$. Les coefficients ce cette combinaison sont alors appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Supposons qu'un espace vectoriel E possède une base de n éléments. Fort de notre savoir sur la résolution des systèmes linéaires homogènes, nous montrons qu'une famille libre a n ou moins de n vecteurs. Il en résulte que toute base de E a le même nombre d'éléments appelé la dimension de E.

Objectif

- Connaître les définitions de base de la théorie : **K**-espace vectoriel , sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, vecteur nul, famille libre, famille liée, famille génératrice, base, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage ...

- Soit E est un **K**-espace vectoriel muni d'une base, considérons une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans cette base : Savoir décider si cette famille est libre ou si c'est une base de E.

- Savoir déterminer une base des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes en suivant l'algorithme de résolution.

- Soit E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, nous supposons que les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. le quatrième objectif est de savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base à l'aide de ses cordonnées dans l'autre base.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

3.2 Définition, exemples

Définition 3.2.1 *Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est la donnée d'un ensemble E muni de deux lois :*

- *une loi interne dite d'addition et notée $+$, c'est à dire de l'application :*

$$E \times E \to E \quad , \quad (u, v) \mapsto u + v$$

- *une loi externe dite de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement, c'est à dire de l'application :*

$$K \times E \to E \quad , \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

asujetties aux conditions a, b, c suivantes :

a) L'addition est une loi de groupe commutatif :

i) Associativité : $\forall\, u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$. Cet élément est alors noté $u + v + w$.

ii) Existence d'un élément neutre : il existe un élément noté $0 \in E$ (ou $\vec{0}$, ou encore 0_E) tel que pour tout $u \in E$: $u + 0 = 0 + u = u$.

iii) Existence d'un opposé : pour tout élément $u \in E$, il existe un élément noté $-u \in E$, appelé opposé de u , tel que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.

iv) Commutativité : $\forall\, u, v \in E\ ,\ u + v = v + u\ .$

b) La loi externe vérifie pour tout $u \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$: $\lambda(\mu\, u) = (\lambda\mu)\, u$ *et* $1u = u$ *où* 1 *est le neutre de la multiplication de* K.
c) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $u, v \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$:

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v\ .$$

Dans ce chapitre, **K** désignera au choix l'ensemble **Q** des nombres rationnels, l'ensemble **R** des nombres réels, l'ensemble **C** des nombres complexes ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

3.3 Définition, exemples

Définition 3.3.1 *Un* **K***-espace vectoriel* E *est la donnée d'un ensemble* E *muni de deux lois :*

- *une loi interne dite d'addition et notée* $+$, *qui à tout couple* $u, v \in E$ *associe un vecteur noté* $u + v$,
- *une loi externe dite de multiplication par un scalaire et notée multiplicativement qui à tout* $\lambda \in \mathbf{K}$ *et tout* $u \in E$ *associe un vecteiur noté* λu,

asujetties aux conditions a, b, c suivantes :

a) L'addition est une loi de groupe commutatif, c'est à dire vérifie les quatre propriétés suivantes :

i) Associativité : $\forall\, u, v, w \in E\ ,\ (u + v) + w = u + (v + w)$ *. Cet élément est alors noté* $u + v + w$.

ii) Existence d'un élément neutre qui est alors unique noté $0_E \in E$ *(ou* $\vec{0}$*, ou encore* 0 *) caractérisé par : pour tout* $u \in E$, $u + 0 = 0 + u = u$.

iii) Existence d'un opposé à tout élément $u \in E$ *qui est alors unique noté* $-u \in E$ *caractérisé par :* $u + (-u) = (-u) + u = 0_E$.

iv) Commutativité : $\forall\, u, v \in E\ ,\ u + v = v + u$.

b) La loi externe vérifie pour tout $u \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$ *:* $\lambda(\mu\, u) = (\lambda\mu)\, u$ *et* $1u = u$ *où* 1 *est le neutre de la multiplication de* K*.*

c) Les deux lois vérifient entre elles pour tout $u, v \in E$ *et* $\lambda, \mu \in K$ *:*

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \quad \text{et} \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \ .$$

Les éléments d'un **K**-espace vectoriel E sont appelés vecteurs de E et les éléments du corps **K** sont appelés scalaires.

Notons que pour tout $u \in E$: $0u = 0_E$. En effet $(0+0)u = 0u+0u$, donc $0u = 0u+0u$. En ajoutant l'opposé de $0u$ des deux cotés de cette égalité, il vient bien $0u = 0_E$.

Si E est un **K**-espace vectoriel et u, v deux vecteurs de E, nous notons $u - v = u + (-v)$.

Exemples Nous avons dejà rencontré de nombreux espaces vectoriels :

1) **K** lui même muni de son addition et de sa multiplication est un **K**-espace vectoriel.

2) L'ensemble $\mathbf{K}^n$ des n-uplets d'éléments de **K** est un **K**-espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de **K** :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\ .$$

3) L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps **K** est un **K**-espace vectoriel pour ses opérations d'addition et de multiplication par un élément de **K** :

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \text{ et } \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})\ .$$

3.4 Sous-espaces vectoriels

Définition 3.4.1 *Une sous-ensemble non vide F d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est appelé sous-espace vectoriel de E si F est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire, c'est à dire si :*

$$\forall u, v \in F \ , \ \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad : \quad u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \ .$$

Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E, nous avons dans F une addition et une multiplication par un scalaire. Le lecteur vérifiera que ces opérations vérifient les conditions a, b et c de la définition 3.3.1. Munis de ces opérations déduites de celles de E, F est donc un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Il résulte de la définition 3.4.1 que tout sous-espace vectoriel F de E contient 0_E et que 0_E reste le neutre pour l'addition de F. On notera également que si $u \in F$, où F est un sous-espace vectoriel F de E, l'opposé $-u = (-1)u$ de u dans E appartient à F et est aussi son opposé dans F.

L'ensemble $\{0_E\}$ réduit au zéro de E est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.4.2 *L'intersection de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve : Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Tout d'abord $0_E \in F_1$, car F_1 est un sous-espace vectoriel de E. De même, $0_E \in F_2$. Ainsi, $0_E \in F_1 \cap F_2$ et $F_1 \cap F_2$ est donc non vide. Soit $u, v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En particulier, u et v sont deux éléments de F_1. Comme F_1 est un sous-espace vectoriel de E : $u + v \in F_1$ et $\lambda u \in F_1$. De même, $u + v \in F_2$ et $\lambda u \in F_2$. Ainsi, $u + v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda u \in F_1 \cap F_2$. Cela montre que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.4.3 *Les solutions d'un système de p équations linéaires homogènes (c.a.d. sans second membres) à n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.*

Preuve : Commençons par montrer que les solutions d'une seule équation linéaire homogène à n variables à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{K}$, désignons par F le sous-ensemble de $\mathbf{K}^n$ constitué des solutions de l'équation linéaire :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad .$$

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Tout d'abord, F est non vide puisqu'il contient $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ le neutre de l'addition de $\mathbf{K}^n$. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, x_2, \ldots, y_n)$ deux éléments de F et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi :

$$(*) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \quad \text{et} \quad a_1y_1 + a_2x_2 + \cdots + a_ny_n = 0 \; .$$

Rappelons que :

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \; .$$

Il résulte de $*$ que :

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \cdots + a_n(x_n + y_n) &= (a_1x_1 + a_1y_1) + (a_2x_2 + a_2y_2) + \cdots + (a_nx_n + a_ny_n) \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n) \\ &= 0 + 0 = 0 \quad . \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \cdots + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \\ &= \lambda 0 \; = \; 0 \quad . \end{aligned}$$

Nous avons ainsi montré que $x + y$ et λx sont des éléments de F. Donc, F un un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Traitons maintenant le cas d'un système d'équations linéaires homogènes. L'ensemble des solutions d'un tel système est l'intersection des solutions de chaque équation de ce système. Chacune de ces équations est homogène. Ses solutions forment suiavant la première partie de la peuve un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. L'ensemble des solutions de notre système d'équations linéaires homogènes est donc une intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Suivant la proposition 3.4.2 , cet ensemble est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

Définition 3.4.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u_1, \ldots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$. Le vecteur $\lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \cdots + \lambda_pu_p$ est appelé une combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_p$. On note $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_p$.*

Proposition 3.4.5 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $u_1, \ldots, u_p \in E$, alors $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_p$.*

Preuve : Nous avons $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_p$. Donc, $0_E \in Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ qui est donc non vide. Soit $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ et $w = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_p u_p$ où $\lambda_i, \mu_i \in \mathbf{K}$ deux combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} v + w = (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) + (\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_p u_p) &= (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_p + \mu_p)u_p \\ \lambda v = \lambda(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) &= (\lambda\lambda_1)u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_p)u_p \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, $v+w$ et λv sont des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, \ldots, u_p$. On a ainsi montré que $Vect(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est non vide et stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 3.4.6 *Nous noterons en particulier que si $u_1, \ldots, u_p$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E, toute combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$ est un vecteur de F. Ainsi,* $\mathrm{vect}(u_1, \ldots, u_p)$ *est un sous-espace vectoriel de F. A ce propos, nous pouvons noter qu'un sous-espace vectoriel d'un sous-espace vectoriel F de E n'est autre qu'un sous-espace vectoriel de E contenu dans F.*

3.5 Famille libre, famille génératrice et base

Définition 3.5.1 *Soit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.*

a) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de E, si tout vecteur de E est combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Autrement dit, si $E = Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ ou encore si pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tel que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \quad .$$

b) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est libre, si pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0 \quad .$$

c) Nous disons que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de E, si cette famille est libre et génératrice.

Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ non libre est aussi dite liée. Une telle famille est caractérisée par l'existence d'une "relation non triviale": des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \quad .$$

Exemple de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ Les vecteurs :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)\ ,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)\ ,\ \ldots\ ,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

de $\mathbf{K}^n$ forment une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Preuve : Montrons tout d'abord que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. nous avons :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \ .$$

Ainsi, le vecteur x est bien dans $Vect(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice. Montrons maintenant que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Soit $x_1, \ldots x_n \in \mathbf{K}$ tels que $x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0_{\mathbf{K}^n}$. Nous en déduisons

$$x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = (0, \ldots, 0)\ .$$

Comme $x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = (x_1, \ldots, x_n)$, nous en déduisons :

$$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)\ .$$

Ainsi, chaque x_i est nul. La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc libre.

Remarque 3.5.2 *Une famille réduite à un vecteur non nul est libre. Une famille de vecteurs contenant le vecteur nul n'est jamais libre.*

Preuve (exemple de raisonement par l'absurde) : Soit u un vecteur non nul d'un **K**-espace vectoriel E. Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est non nul et vérifie $\lambda u = 0_E$. Multiplions cette identité par $1/\lambda$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\lambda}\lambda u = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E$$

D'où $u = 0_E$: contradiction. Donc $\lambda \in \mathbf{K}$ avec $\lambda u = 0_E$ implique $\lambda = 0$. La famille réduite au vecteur u est donc libre.

Soit $v_1, \ldots, v_p$ une famille de vecteurs d'un **K**-espace vectoriel E. Supposons par exemple que le k-ième vecteur v_k de cette famille soit nul. Nous avons la relation :

$$0v_1 + \cdots + 0v_{k-1} + 1v_k + 0v_{k+1} + \cdots + 0v_p = 0_E \ .$$

Les coefficients de cette relation entre les v_i ne sont pas tous nuls. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ n'est donc pas libre.

Proposition 3.5.3 *L'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans* **K** *fournit une base de l'espace vectoriel de ses solutions.*

Preuve : Considérons un système d'équations linéaires homogènes E de p équations à n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients dans **K** . Suivant la proposition 3.4.3 les solutions F de ce système forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Un tel système d'équations linéaires homogènes a au moins $(0, \ldots, 0)$ comme solution. L'algorithme de Gauss détermine alors un système d'équations linéaires homogènes triangulé E' ayant les mêmes solutions. Soit I l'ensemble des indices des variable libres de E'. L'algorithme de résolution d'un système triangulé nous donne les solutions de E sous la forme

$$F = \{\sum_{i \in I} x_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,i-1}, 1, 0, \ldots, 0) \text{ tels que } \forall i \in I \ : \ x_i \in \mathbf{K}\} \quad .$$

Pour $i \in I$, posons $v_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$. Notre résultat s'esprime exactement par :

$$F = Vect(v_i)_{i \in I} \ .$$

La famille $(v_i)_{i\in I}$ est donc une famille génératrice de F. Cette famille est libre. En effet, si

$$\sum_{i\in I} x_i v_i = 0 \ .$$

Pour $i \in I$, le i-ème coeeficient du terme de gauche étant x_i, nous obtenons $x_i = 0$. Donc, pour tout $i \in I$, $x_i = 0$ et la famille $(v_i)_{i\in I}$ est libre. Elle forme donc une base de F.

Illustrons cette proposition sur l'exemple suivant :

Exemple Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions du système d'équations linéaires homogènes à coefficients réels :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & \quad (E_1) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 18x_4 & = & 0 & \quad (E_2) \end{array} \right. \ .$$

Les variables sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement. Les deux équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) est donc ordonné. Faisons tourner l'algorithme de triangulation. Le systéme (E) a mêmes solutions que le système :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & \quad (E_1) \\ x_3 + 17x_4 & = & 0 & \quad (E_2' = E_2 - E_1) \end{array} \right. \ .$$

Ce système est triangulé car $1 = v(E_1) < v(E_2') = 3$. Les variables libres de (E') sont donc x_2 et x_4. Résolvons (E'). La dernière équation donne : $x_3 = -17x_4$. En remplaçant dans la première, on obtient : $x_1 = -x_2 + 16x_4$. Ainsi, nous obtenons l'ensemble F des solutions de (E) :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(-x_2 + 16x_4, x_2, -17x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ & = & \{x_2(-1,1,0,0) + x_4(16,0,-17,1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \end{array} \ .$$

Ainsi, $F = \mathrm{vect}((-1,1,0,0),(16,0,-17,1))$. La famille $((-1,1,0,0),(16,0,-17,1))$ est libre. En effet, si

$$x_2(-1,1,0,0) + x_4(16,0,-17,1) = (-x_2 + 16x_4, x_2, -17x_4, x_4) = 0 \quad ,$$

c'est que $x_2 = x_4 = 0$. La famille $(-1,1,0,0),(16,0,-17,1)$ génératrice de F et libre est donc une base de F.

3.6 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $u \in E$. Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est donc une famille génératrice de E, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$. Nous allons montrer que cette famille de scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ est unique. Pour ce faire, soit $\lambda'_1, \ldots \lambda'_n$ une deuxième famille de scalaires telle que $u = \lambda'_1 e_1 + \cdots + \lambda'_n e_n$. Par différence, nous obtenons :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_p = 0 \quad .$$

Comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre, il en résulte :

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0 \quad ..., \quad \lambda_n - \lambda'_n = 0 \; .$$

D'où, $\lambda_1 = \lambda'_1$, ..., $\lambda_n = \lambda'_n$.

Définition 3.6.1 *(coordonnées d'un vecteur dans une base) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel E. Tout vecteur u de E s'écrit alors de façon unique $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ où $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ s'appellent les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Le scalaire x_i est appelé la i-ème coordonnée de u dans la base $\mathcal{B}$.*

Si E possède une base $\mathcal{B}$ de n éléments, notons que deux vecteurs de E sont égaux si et seulement si leurs n coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont égales. Retenez le principe : "une identité vectorielle équivaut à n égalités scalaires".

Notons que mis à part dans le cas de $\mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique, un vecteur d'un espace vectoriel n'est jamais égal à ses coordonnées dans une base.

Proposition 3.6.2 *Soit $u, v \in E$, $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $u + v$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et λu a pour coordonnées $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Preuve : Par définition des x_i et y_i : $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $v = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$.
Il en résulte que $u+v = (x_1+y_1)e_1+\cdots+(x_n+y_n)e_n$. Ainsi $u+v$ a bien pour cordonnées $(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. De même, $\lambda u = (\lambda x_1)e_1 + \cdots + (\lambda x_n)e_n$. Et λu a bien pour coordonnées $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, on observe que :

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

Ainsi, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. C'est le seul exemple ou un vecteur ne diffère pas de ses coordonnées ...

3.7 Dimension d'un K-espace vectoriel

Proposition 3.7.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute famille de plus de $n+1$ vecteurs de E est liée.*

Preuve : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base de E dont nous supposons l'existence. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de $p \geq n+1$ vecteurs de E est liée. Désignons par $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. Nous devons montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$(*) \quad a_1u_1 + \cdots + a_ju_j + \cdots + a_pu_p = 0 \quad .$$

Cherchons donc les $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ solutions de $*$. Suivant la proposition 3.6.2, les coordonnées de $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_pu_p$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} + \cdots + a_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, l'égalité $*$ équivaut à l'égalité :

$$(**) \qquad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}a_1 + \cdots + a_{1,j}a_j + \cdots + a_{1,p}a_p & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}a_1 + \cdots + a_{n,j}a_j + \cdots + a_{n,p}a_p & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce systéme admet déjà la solution évidente $(0, \ldots, 0)$. Suivant l'algorithme de résolution, $**$ a même solution qu'un système triangulé de $m \leq n$ équations linéaires homogènes à n variables. Ce système admet donc au moins une variable libre et donc a plus d'une solution et même une infinité puisque l'ensemble K que nous considérons a un nombre infini d'éléments. Ainsi, notre système admet une solution différente de $(0, \ldots, 0)$. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E est donc liée.

Théorème 3.7.2 *(définition de la dimension) Soit E un* $\mathbf{K}$*-espace-vectoriel qui possède une base de n vecteurs, alors toute base de E a n éléments. Cet entier n, noté* $\dim_{\mathbf{K}} E$*, est appelé la dimension de E.*

Preuve : Sinon, E admettrait une famille libre ayant un nombre d'éléments strictement plus grand que celui d'une base de E.

Proposition 3.7.3 *Soit E un* $\mathbf{K}$*-espace-vectoriel non réduit à zéro admettant une famille génératrice. Alors, nous pouvons extraire de cette famille génératrice une base de E.*

Preuve : Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ cette famille génératrice.

Cas $p = 1$: Le vecteur v_1 engendre E. Comme E est non réduit à zéro, le vecteur v_1 n'est pas nul. La famille réduite à l'élément v_1 est donc libre (voir). C'est donc une base de E.

Cas $p > 1$: Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre, puisqu'elle est supposée génératrice, c'est une base de E. Sinon, il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{K}$ non tous nuls tels que :

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_pv_p = 0 \quad .$$

Quitte à renuméroter la famille, on peut supposer que a_1 est non nul. On en déduit :

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \cdots - \frac{a_p}{a_1}v_p \quad .$$

Par hypothèse, tout vecteur u de E s'écrit :

$$u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \quad ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{K}$. D'où :

$$u = (\lambda_2 - \lambda_1 \frac{a_2}{a_1})v_2 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_1 \frac{a_p}{a_1})v_p \quad .$$

Ainsi, la famille $(v_2, \ldots, v_p)$ serait génératrice. En itérant ce procédé, nous obtenons une base de E extraite de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$.

Une famille génétrice d'un espace vectoriel de dimension n a donc toujours au moins n éléments.

Proposition 3.7.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de dimension n. Alors toute famille libre peut être completée en une base.*

Preuve : Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E. On sait alors que $p \leq n$ (proposition 3.7.1). Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice, c'est une base de E. Sinon, il existe $v_{p+1} \in E$ non combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$. Considérons une relation :

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + a_{p+1} v_{p+1} = 0 \quad .$$

où $a_i \in \mathbf{K}$. Alors $a_{p+1} = 0$, sinon :

$$v_{p+1} = -\frac{a_1}{a_{p+1}}v_1 - \cdots - \frac{a_p}{a_{p+1}}v_p \quad .$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur v_{p+1}. Il en résulte :

$$a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p = 0 \quad .$$

Mais alors, puisque la famille de départ $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre, tous les a_i sont nuls. Cela montrer que notre nouvelle famille $(v_1, \ldots, v_{p+1})$ est libre et que nous pouvons donc compléter la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ en une famille libre $(v_1, \ldots, v_{p+1})$. Nous itérons ce procédé. En moins de $\dim_{\mathbf{K}} E - p$ étapes, nous complétons $(v_1, \ldots, v_p)$ en une base de E, car sinon nous fabriquerions sinon une famille libre de E ayant $\dim_{\mathbf{K}} E + 1$ éléments.

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a donc toujours au plus n éléements.

Corollaire 3.7.5 *Soit E un* **K***-espace-vectoriel de dimension n. Alors ;*

- *Une famille libre de n vecteurs de E est une base de E,*
- *Une famille génératrice de E formée de n vecteurs est une base de E.*

Preuve : Sinon, on pourrait suivant les propositions 3.7.3 et 3.7.7 construire deux bases n'ayant pas le même nombre d'éléments.

Définition 3.7.6 *(droite vectorielle, plan, hyperplan) Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 est appelé plan vectoriel. Un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ d'un espace vectoriel E de dimension n esta appalé hyperplan de E.*

Proposition 3.7.7 *Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille génératrice et $(e_1, \ldots, e_m)$ une famille libre d'un* **K***-espace vectoriel E. Alors, on peut compléter la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ par des vecteurs de $(f_1, \ldots, f_p)$ pour obtenir une base de E.*

Preuve Si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base de E, il n'y a rien a compléter. Sinon, $(e_1, \ldots, e_m)$ n'est pas une famille génératrice. L'un des f_i n'est alors pas dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$. Sinon E = $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ serait un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$ et nous aurions alors $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$: contradiction ! Soit alors i_1 tel que f_{i_1} n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$. Soit $a_1, \ldots, a_{m+1} \in \mathbf{K}$ et une relation :

$$a_1e_1 + \cdots + a_me_m + a_{m+1}f_{i_1} = 0 \quad .$$

Si a_{m+1} est non nul, nous aurions $f_{i_1} = -(1/a_{m+1})(a_1e_1 + \cdots + a_me_m)$, ce qui contredit l'hypothèse sur f_{i_1}. Donc, $a_{m+1} = 0$ et la famille $(e_1, \ldots, e_m)$ étant libre, nous en déduisons que tous les a_i sont nuls. La famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1})$ est donc libre. Si c'est une famille génératrice de E, c'est une base de E et nous avons terminé. Sinon, continuons. Supposons la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ libre. Les f_{i_j} sont alors deux à deux dictincts, car une famille libre ne contient pas deux vecteurs égaux. Si $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$ est génératrice, c'est une base de E. Sinon, par le même argument que précédemment, il existe $i_{r+1} \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_{i_{r+1}} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$. Nous montrons alors comme précedemment que la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_{i_1}, \ldots, f_{i_{r+1}})$ est libre. En moins de p étapes, nous obtenons une base de E, car la famille $(e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_p)$ est une famille génératrice de E.

3.8 Décider si une famille de vecteurs est libre

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Question : Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E **donnés par leurs coordonnées dans la base** $\mathcal{B}$. la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est-elle une famille libre ? Nous avons vu à la proposition 3.7.1 que pour cela il est nécessaire que $p \leq n$. Supposons $p \leq n$.

Notons $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$u_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n \quad .$$

Suivant la proposition 3.6.2, les coordonnées de $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_1 + \cdots + a_{1,j}a_j + \cdots + a_{1,n}a_n \\ \vdots \\ a_{n,1}a_1 + \cdots + a_{n,j}a_j + \cdots + a_{n,n}a_n \end{pmatrix} \quad .$$

Réponse : Ainsi, $(u_1, \dots, u_p)$ est une fammille libre si et seulement si le système

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

admet $(0, \dots, 0)$ comme seule solution. Por répondre à la question, il suffit alors de résoudre le système $(*)$.

3.9 Décider si une famille de vecteurs est une base

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E. Toutes les bases de E ayant le même nombre d'éléments, si p est différent de n, $(u_1, \dots, u_p)$ ne sera jamais une base de E.

Question : Soit $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E **donnés par leurs coordonnées dans la base** $\mathcal{B}$. la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est-elle une base de E ?

Notons $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$u_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n \quad .$$

D'après le corollaire 3.7.5, $(u_1, \dots, u_n)$ sera une base de E si et seulement c'est une famille libre.

Suivant la proposition 3.6.2, les coordonnées de $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_j \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}a_1 + \cdots + a_{1,j}a_j + \cdots + a_{1,n}a_n \\ \vdots \\ a_{n,1}a_1 + \cdots + a_{n,j}a_j + \cdots + a_{n,n}a_n \end{pmatrix} \quad .$$

Réponse 1 : Ainsi, $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E si et seulement si le système

$$(*) \quad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. .$$

admet $(0,\dots,0)$ comme seule solution.

Notons $M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$ la matrice carrée dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. $M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$ est donc la matrice carrée de terme général $(a_{i,j})$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

D'après la proposition **??** ou la proposition **??**, le système $*$ admet $(0,\dots,0)$ comme seule solution si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$ qui est la matrice associée à ce système est inversible.

Réponse 2 : Pour montrer que $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E, il suffit de montrer l'inversibilité de $M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$.

Proposition 3.9.1 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E . Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si la matrice carrée $M_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs $(u_1,\dots,u_n)$ est inversible.*

Exemple : Soit E un $\mathbf{R}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$. Considérons les vecteurs $u_1=e_1+2e_2$ et $u_2=e_1+3e_2$. Montrer que la famille (u_1,u_2) est une base de E.

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} E = 2$, il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2) est libre (voir corollaire 3.7.5). Soit $a, b \in \mathbf{K}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. Les coordonnées de $au_1 + bu_2$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix}$$

Ainsi, $au_1 + bu_2 = 0$ équivaut au système d'équations lináires homog'enes :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcll} a+b & = & 0 & \quad (E_1) \\ 2a+3b & = & 0 & \quad (E_2) \end{array} \right. ,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**) \quad \left[\begin{array}{rcll} a+b & = & 0 & \quad (E_1) \\ b & = & 0 & \quad (E_2 - 2E_1) \end{array} \right. ,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (u_1, u_2) est libre. C'est donc une base E.

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de u_1, u_2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (u_1, u_2) est une base de E.

Exemple (variante) : Soit les vecteurs $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$ de $\mathbf{R}^2$. Montrer que la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

A un détail près, il s'agit du même exemple que le précédent. En effet, dire que $v_1 = (1, 4)$ et $v_2 = (1, 5)$, c'est dire que dans la base canonique $((1, 0), (0, 1))$ de $\mathbf{R}^2$, les coordonnées de v_1 et v_2 sont respectivement $(1, 4)$ et $(1, 5)$.

Méthode 1 : Comme $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^2 = 2$, il suffit de montrer que la famille (v_1, v_2) est libre (voir corollaire 3.7.5). Soit $a, b \in \mathbf{K}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. En colonne :

$$av_1 + bv_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 4a+5b \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $av_1 + bv_2 = 0$ équivaut au système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \qquad (E_1) \\ 4a+5b & = & 0 \qquad (E_2) \end{array} \right. ,$$

ou encore au système triangulé :

$$(**) \quad \left[\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \qquad (E_1) \\ b & = & 0 \qquad (E_2 - 4E_1) \end{array} \right. ,$$

On en déduit $a = b = 0$ et donc que la famille (v_1, v_2) est libre. C'est donc une base E.

Méthode 2 : La matrice carrée dont les colonnes sont les coefficients de v_1, v_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est :

$$M(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 1. Cette matrice est donc inversible et (v_1, v_2) est une base de E.

3.10 Coordonnées d'un vecteur dans des bases différentes

Soit E un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dite ancienne base. Donnons nous une autre base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ dite nouvelle base et **supposons connues les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$** .

Soit $(a_{1,j},\ldots,a_{n,j})$ les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, de sorte que :

$$e'_j = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{n,j}e_n \quad .$$

Définition 3.10.1 *(matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un* **K***-espace-vectoriel E. Appelons matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice carrée $P = M_{\mathcal{B}}(e'_1,\ldots,e'_n)$ dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.*

$$P = M_{\mathcal{B}}(e'_1,\ldots,e'_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons vu à la proposition 3.9.1 que la matrice P est inversible.

question 1 : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(X_1,\ldots,X_n)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, quelles sont ses coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$?

Suivant la proposition 3.6.2, les coordonnées de $u = X_1e'_1 + \cdot + X_ne'_n$ dans la base $\mathcal{B}$ écrites en colonnes sont :

$$X_1\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + X_j\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} + \cdots + X_n\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,j}X_j + \cdots + a_{1,n}X_n \\ \vdots \\ a_{n,1}X_1 + \cdots + a_{n,j}X_j + \cdots + a_{n,n}X_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad .$$

Question 2 : Si u est un vecteur de E de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées $(X_1,\ldots,X_n)$ dans la nouvele base $\mathcal{B}'$?

Réponse 1 : D'après la question précédente, les coordonnées $(X_1, \ldots, X_n)$ de u dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont l'unique solution du sysème de n équations linéaires :

$$\left[\begin{array}{rcl} a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,j}X_j + \cdots + a_{1,n}X_n & = & x_1 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}X_1 + \cdots + a_{n,j}X_j + \cdots + a_{n,n}X_n & = & x_n \end{array}\right. \quad .$$

Il suffit de résoudre le système $*$, par exemple en suivant l'algorithme donné au chapître 3.

Réponse 2 : D'après la question précédente, comme la matrice P est inversible, les coordonnées $(X_1, \ldots, X_n)$ de u dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Il reste à calculer P^{-1}, ce qu'on peut faire en utilisant les méthodes ou l'algorithme donnés au chapître 4.

En particulier, si on prend $u = e_j$, ses coordonnées dans l'ancienne base $\mathcal{B}$ sont $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ où le 1 est placé à la j-ème place. Ainsi, les coordonnées de e_j dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ sont :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où 1 est sur la ligne j}$$

qui n'est autre que la j-ème colonne de P^{-1}. Ainsi, P^{-1} n'est autre que la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de e_j dans la base $\mathcal{B}'$:

$$P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(e_1, \ldots, e_n) \quad .$$

Résumons une partie de cette étude en une proposition :

Proposition 3.10.2 *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbf{K}$-espace-vectoriel E de dimension n. Désignons par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit u un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et soit $(X_1, \dots X_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$, alors on a :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice, P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Exemple : Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit $e'_1 = e_1 + 2e_2$ et $e'_2 = e_1 + 3e_2$, nous avons vu que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E. Si (x_1, x_2) sont les coordonnées d'un vecteur u d eE dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont ses coordonnées (X_1, X_2) dans la base $\mathcal{B}'$?

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse s'obtient suivant la chapître **??** en calculant le déterminant et la comatrice de P. On Obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad .$$

4 Sous-espaces vectoriels

4.1 Introduction

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, nous commençons par observer que tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension inférieure ou égale à n et que si $\dim_{\mathbf{K}} F = \dim_{\mathbf{K}} E$, c'est que $F = E$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, autrement dit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. A partir de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}$, nous donnons un algorithme pour calculer la dimension de F appelée aussi rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Cet algorithme construit en fait une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $*$ un système de m équations linéaires homogènes de n variables à coefficients dans $\mathbf{K}$. Nous pouvons observer facilement que le sous-ensemble de E formé des vecteurs dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions de $*$ est un sous-espace vectoriel E. Nous montrons inversement que tout sous-espace vectoriel F de E est en fait formé des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont les solutions d'un système équations linéaires homogènes de n variables. Nous appelons un tel système un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$. Si F est engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de E, nous montrons comment déterminer un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$.

Si F est donné par un système de générateurs, il est facile de déterminer des vecteurs de F. Ils sont en effet "paramétrés" par la famille génératrice. Par contre, si F est donné par un système d'équations, il est facile de vérifier si un vecteur de E est dans F. L'idéal est donc de disposer à la fois d'un système de générateurs d'un sous-espace vectoriel et d'un système d'équations. Les algorithmes du chapître 1 et de ce chapître permettent justement de passer d'une présentation à l'autre.

La somme de deus sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E est l'ensemble des sommes des vecteurs de F et des vecteurs de G. C'est un espace vectoriel noté $F+G$. Nous montrons la formule :

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

La somme $F+G$ est dite directe si $F \cap G = \{0\}$. Tout vecteur de $F+G$ se décompose alors de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G. On dit que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E si $E = F \oplus G$. Dans ce cas, tout vecteur de E se décompose de façon unique commme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Objectif Soit E et un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$ et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

- Savoir déterminer à l'aide de $M_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ une base échelonnée de $F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et donc le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$.
- Savoir déterminer à l'aide d'une base échelonnée de F un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Savoir montrer en petite dimension que deux sous-espaces vectoriels sot supplémentaires. Dans ce cas, savoir préciser la décomposition d'un vecteur de E en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

4.2 Sous-espaces vectoriels et dimension

Proposition 4.2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel non réduit à zéro d'un K-espace vectoriel E de dimension n. Alors, F admet une base et* $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq n$.

Preuve : Observons les deux points suivants.
1) Soit u un vecteur non nul de F. Suivant la remarque 3.7, la famille (u) réduite au seul vecteur u est alors libre.

2) Supposons construit une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de F qui ne soit pas une base de F. Soit alors, $u_{p+1} \in F$ qui ne soit pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$. Il en résulte (voir preuve de la proposition 3.7.7) que la famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est une famille libre de vecteurs de F.

Suivant ces deux remarques, si F n'admettait pas de base, nous construirions une famille libre de strictement plus de n vecteurs. C'est impossible, car toute famille de strictement plus de n vecteurs de E est liée. Ainsi, F admet une base. Cette base est une famille libre de vecteurs de E. Elle a donc moins de n éléments et $\dim_{\mathbf{K}}(F) \leq n$.

Proposition 4.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F) = \dim_{\mathbf{K}}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad F = E \quad .$$

Preuve : Supposons $\dim_{\mathbf{K}}(F) = n$. Les vecteurs de $\mathcal{B}$ forment donc une famille libre de de n vecteurs de E. Suivant le corollaire 3.7.5, $\mathcal{B}$ est une base de E. Ainsi, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$, donc de F. Ainsi, $E \subset F$ et $E = F$. Inversement si $E = F$, les dimensions e E et F sont bien égales.

Corollaire 4.2.3 *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n.*

$$E_1 \subset E_2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbf{K}}(E_1) = \dim_{\mathbf{K}}(E_2) \quad \Longleftrightarrow \quad E_1 = E_2 \quad .$$

Preuve : En effet, E_1 est un sous-espace vectoriel de E contenu dans le sous-espace vectoriel E_2 de E. C'est donc un sous-espace vectoriel de E_2. Il reste à appliquer la proposition 4.2.2.

Soit maintenant E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Le sous-espace $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est par définition engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$. Sa dimension est donc inférieureà p.

Définition 4.2.4 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. Nous appelons rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ l'entier :*

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim_{\mathbf{K}} Vect(u_1, \ldots, u_p) \ \leq \ p \quad .$$

Remarque 4.2.5 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = p &\iff (u_1, \ldots, u_p) \text{ base de } Vect(u_1, \ldots, u_p) \\ &\iff (u_1, \ldots, u_p) \text{ famille libre} \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Posons $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$.

Comme F est par définition engendré par $u_1, \ldots, u_p$, les assertions $(u_1, \ldots, u_p)$ base de F et $(u_1, \ldots, u_p)$ famille libre sont équivalentes.

Si le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est p, c'est que F est de dimension p. Ainsi $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de F ayant le même nombre d'éléments qu'une base de F, c'est donc une base de F.

Inversement si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F, c'est que p est la dimension de F et donc $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = p$.

Remarque 4.2.6 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n \iff Vect(u_1, \ldots, u_p) = E \quad .$$

Preuve : Si $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n$, c'est que $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Il résulte de la proposition 4.2.2 que $Vect(u_1, \ldots, u_p) = E$. Inversement, si $Vect(u_1, \ldots, u_p) = E$, la dimension de $Vect(u_1, \ldots, u_p)$ est n, donc $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = n$.

Remarque 4.2.7 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ de E.

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_n) = n \iff (u_1, \ldots, u_n) \text{ base de } E \quad .$$

Preuve : Cette remarque résulte par exemple des remarques 4.2.6 et 4.2.5.

4.3 Algorithme pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel E. Nous supposerons E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Supposons F **donné par un système de générateurs dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont connues**. Nous nous proposons de donner un algorithme qui fournira une base de F. En particulier, cette algorithme donnera le rang d'une famille de vecteurs donnés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et une base du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de cette famille. Cet algorithme sera une nouvelle fois très semblable à l'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires ou d'échelonnage d'une matrice. Nous procéderons cette fois çi sur la matrice dont les colonnes seront les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs du système de générateurs de F et nous jouerons avec ses colonnes.

Notation 4.3.1 *Soit u un vecteur non nul de E de coordonnées $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous appellerons ordre de u relativement à la base $\mathcal{B}$ l'entier :*

$$v_{\mathcal{B}}(u) = \inf \{i \in \{1, \ldots, n\}, \text{ tel que } a_i \neq 0\} \quad .$$

L'ordre de u est autrement dit l'ordre de la première coordonnée non nulle de u. Nous dirons qu'une famille $u_1, \ldots, u_p$ de vecteurs non nuls de E est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ si $v_{\mathcal{B}}(u_1) < v_{\mathcal{B}}(u_2) < \cdots < v_{\mathcal{B}}(u_p)$.

S'il n'y a pas d'ambiguité sur la base $\mathcal{B}$, nous écrirons plus simplement $v_{\mathcal{B}}(u) = v(u)$.

Lemme 4.3.2 *Une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ est une famille libre.*

Preuve : Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soit $\lambda_i \in \mathbf{K}$, tel que :

$$(*) \quad \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0 \quad .$$

Notons k l'ordre de u_1 dans la base $\mathcal{B}$ et $a_{1,k} \neq 0$ la k-ième coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme la famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ est échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$, la k-ième coordonnée de $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda_1 a_{1,k}$. L'égalité $*$ donne $\lambda_1 a_{1,k} = 0$. D'où, $\lambda_1 = 0$. Itérons, nous obtenons que tous les λ_i sont nuls et la liberté de la famille $u_1, \ldots, u_p$.

Lemme 4.3.3 *(Lemme d'échange) Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p \in E$ et $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ la famille de E déduite de $u_1, \ldots, u_p$ par une succession d'opérations suivantes : permutation de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul ou soustraction à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres. Alors, nous avons :*

a) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$,

b) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ famille libre $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ famille libre ,

c) $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ base de E $\iff (u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ base de$E$.

Preuve : Nous allons montrer le lemme dans le cas :

$$u'_1 = u_1 \ , \ u'_2 = u_2 \ , \ldots \ , \ u'_{p-1} = u_{p-1} \ , \ u'_p = u_p - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \cdots - \gamma_{p-1} u_{p-1} \quad ,$$

où les pour $\gamma_i \in \mathbf{K}$.

Montrons a). Si $u \in \mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p \quad .$$

Il en résulte :

$$u = \lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p-1} u_{p-1} + \lambda_p (u_p - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 - \cdots - \gamma_{p-1} u_{p-1}) \ .$$

Nous en déduisons :

$$u = (\lambda_1 - \lambda_p \gamma_1) u_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p \gamma_{p-1}) u_{p-1} + \lambda_p u_p \quad .$$

Donc, $u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Cela montre l'inclusion :

$$\mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p) \subset \mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad .$$

Mais, nous avons également :

$$u_1 = u'_1 \ , \ \ldots \ , \ u_{p-1} = u'_{p-1}, u_p = u'_p + \gamma_1 u'_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u'_{p-1} == u'_p - (-\gamma_1) u'_1 + \cdots - (-\gamma_{p-1}) u'_{p-1} \quad .$$

Nous obtenons par la raisonnement précédent l'autre inclusion et l'identité atendue :

$$\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \mathrm{vect}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p) \quad .$$

Montrons b). Supposons la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = 0 \quad .$$

D'où , $\lambda_1 u'_1 + \cdots + \lambda_p u'_p = (\lambda_1 - \gamma_1 \lambda_p) u_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} - \gamma_{p-1} \lambda_p) u_{p-1} + \lambda_p u_p = 0$. Comme la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre, on en déduit : $\lambda_1 - \gamma_1 \lambda_p = \cdots = \lambda_{p-1} - \gamma_{p-1} \lambda_p = \lambda_p = 0$. Il en résulte : $\lambda_p = \lambda_{p-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$. La famille $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ est donc libre. La réciproque se montre de même en utilisant l'expression de $u_1 \ldots, u_p$ à l'aide des u'_i.

Montrons c) Il se déduit de a) et b), puisque $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ base de E équivaut à $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ famille libre et $\mathrm{vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = E$.

Notons également que si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, elle reste génératrice et si on enlève les vecteurs nuls d'une famille génératrice, elle reste génératrice.

Notation 4.3.4 *Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Désignons par $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$.*

Détaillons l'algorithme qui précisera à partir de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une base échelonnée de F relativement à la base $\mathcal{B}$.

Étape 1 : Quitte à enlever les vecteurs nuls de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ou à permuter ces vecteurs, nous pouvons supposer les u_i sont non nuls et $v(u_1) \leq v(u_2) \leq \cdots \leq v(u_p)$.

Étape 2 : Posons $d = v(u_1)$. Les $d-1$ premières lignes de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ sont alors nulles. Notons $a_{d,i}$ la d-ème coordonnée de u_i dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de $v(u_1)$, $a_{d,1}$ est non nul. On peut poser :

$$u_1^{(2)} = u_1 \ , \ u_1^{(2)} = u_2 - \frac{a_{d,2}}{a_{d,1}} u_1 \ , \ \ldots \ , \ u_p^{(2)} = u_p - \frac{a_{d,p}}{a_{d,1}} u_1 \quad .$$

D'après le lemme 4.3.3, nous avons toujours : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$. La premiére colonne de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ est la même que la première colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et pour $j \geq 2$, la j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ est la différence de la j-ème colonne de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et de $a_{d,j}/a_{d,1}$ fois sa première colonne. Par définition des $a_{d,i}$, on obtient que pour $j \geq 2$: $v(u_j^{(2)}) > d$. Ainsi, quitte à supprimer les vecteurs nuls de la famille $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)})$ et à permuter ces vecteurs, on peut supposer :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_{p_2}^{(2)}) \quad \text{et} \quad d = v(u_1^{(2)}) < v(u_2^{(2)}) \leq v(u_3^{(2)}) \leq \cdots \leq v(u_{p_2}^{(2)}) \ ,$$

où p_2 est un entier inférieur ou égal à p.

Étape k : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_{p_k}^{(k)})$ où $p_k \leq p_{k-1}$ et $v(u_1^{(k)}) < \cdots < v(u_k^{(k)}) \leq v(u_{k+1}^{(k)}) \leq \cdots \leq v(u_{p_k}^{(k)})$. De plus, les $u_j^{(k)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_{p_k}^{(k)}) = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(k)} & \ldots & a_{1,p(k)}^{(k)} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1}^{(k)} & \ldots & a_{n,p(k)}^{(k)} \end{pmatrix} \quad .$$

Passage à l'étape suivante : Utilisons $u_k^{(k)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs $u_{k+1}^{(k)}, \dots u_{p_k}^{(k)}$. Posons $d = v(u_k^{(k)})$ et $a_{d,k}^{(k)}$ la d-ème coordonnée de $u_k^{(k)}$ dans la base $\mathcal{B}$. Notons :

$$u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} \quad , \dots , \quad u_k^{(k+1)} = u_k^{(k)} \quad , \quad u_{k+1}^{(k+1)} = u_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{d,k+1}^{(k)}}{a_{d,k}^{(k)}} u_k^{(k)} \quad , \dots , \quad u_{p_k}^{(k+1)} = u_{p_k}^{(k)} - \frac{a_{d,p_k}^{(k)}}{a_{d,k}^{(k)}} u_k^{(k)} \quad .$$

Nous avons $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, \dots, u_{p_k}^{(k+1)})$. Il reste à enlever les vecteurs $u_j^{(k+1)}$ qui sont non nuls et à ordonner la famille obtenue. On obtient :

Étape k+1 : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(k+1)}, u_2^{(k+1)}, \dots, u_{p_{k+1}}^{(k+1)})$ où $v(u_1^{(k+1)}) < \dots < v(u_{k+1}^{(k+1)}) \leq v(u_{k+2}^{(k+1)}) \leq \dots \leq v(u_{p_{k+1}}^{(k+1)})$ et $p_{k+1} \leq p_k$. De plus par définition, les $u_j^{(k+1)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Ainsi, en moins de n étapes, on arrive à : $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(l)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{p_l}^{(l)})$ où la famille $u_1^{(l)}, \dots, u_{p_l}^{(l)}$ est une famille de p_l vecteurs échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$ et où les $u_j^{(l)}$ s'expriment comme combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$. D'après le lemme 4.3.2, la famille $(u_1^{(l)}, \dots, u_{p_l}^{(l)})$ est donc libre. Elle engendre F. C'est donc une base de F. En particulier $\dim_{\mathbf{K}} F = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p_l$.

Si $p_l < p$, la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ n'est pas libre et l'algorithme donne $p - p_l$ combinaisons linéaires non triviales des $u_1, u_2, \dots, u_p$ égales au vecteur nul.

Suivant la remarque 4.2.5, $p_l = p$ équivaut à $(u_1, \dots, u_p)$ famille libre ou encore $(u_1, \dots, u_p)$ base de F.

Exemple 1 : Notons $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$:

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \quad .$$

Soit $u_1 = (2,1,0), u_2 = (-1,2,1), u_3 = (3,4,1), u_4 = (0,5,2)$. Notons F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ de E. Déterminons une base de F.

Étape 1 : Puisque (a, b, c) sont les coordonnées de (a, b, c) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, nous avons d'une part : $v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) < v(u_4)$. D'autre part, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) \quad .$$

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1', u_2', u_3', u_4') = \begin{pmatrix} u_1' = u_1 & u_2' = u_2 + (1/2)u_1 & u_3' = u_3 - (3/2)u_1 & u_4' = u_4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 5/2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1', u_2', u_3', u_4') \; .$$

On a $v(u_1') < v(u_2') = v(u_3') = v(u_4')$.

Étape 3 : Nous utilisons u_2' pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u_4'') = \begin{pmatrix} u_1'' = u_1' & u_2'' = u_2' & u_3'' = u_3' - u_2' & u_4'' = u_4' - 2u_2' \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1'', u_2'', u_3'', u_4'') \; .$$

On a $v(u_1'') < v(u_2'')$ et $u_3'' = u_4'' = 0$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'') = \begin{pmatrix} u_1'' = u_1' & u_2'' = u_2' \\ 2 & 0 \\ 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \mathrm{Vect}(u_1'', u_2'') \; .$$

L'algorithme est terminé et la famille $(u_1'' = 2e_1 + e_2 = (2, 1, 0), u_2'' = (5/2)e_2 + e_3 = (0, 5/2, 1))$ est donc une base de F échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Remarquons que :

$$\begin{array}{rclcl} (2,1,0) & = & u_1'' & = & u_1' & & = & u_1 \\ (0,5/2,1) & = & u_2'' & = & u_2' & & = & u_2+(1/2)u_1 \\ 0 & = & u_3'' & = & u_3'-u_2' = u_3-(3/2)u_1-(u_2+(1/2)u_1) & & = & u_3-u_2-2u_1 \\ 0 & = & u_4'' & = & u_4'-2u_2' = u_4-2(u_2+(1/2)u_1) & & = & u_4-2u_2-u_1 \end{array}$$

En conclusion, l'algorithme nous permet d'affirmer que $((2,1,0)=u_1,(0,5/2,1)=u_2+(1/2)u_1)$ est une base de F. Il donne les relations $0=u_3-u_2-2u_1$ et $0=u_4-2u_2-u_1$ entre les vecteurs u_1,u_2,u_3,u_4.

Exemple 2 : Considérons E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base de E. Soit $u_1=e_1-e_2+e_4, u_2=2e_1+e_2+4e_3+5e_4, u_3=e_1+2e_2-4e_3-2e_4, u_4=2e_1-3e_2+4e_3+5e_4, u_5=e_1+e_2+e_4$. Notons F le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$ de E. Déterminons une base de F.

Étape 1 : Nous avons : $v(u_1)=v(u_2)=v(u_3)=v(u_4)=v(u_5)$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) \quad .$$

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1',u_2',u_3',u_4',u_5')=\begin{pmatrix} u_1'=u_1 & u_2'=u_2-2u_1 & u_3'=u_3-u_1 & u_4'=u_4-2u_1 & u_5'=u_5-u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

$F=\mathrm{Vect}(u_1',u_2',u_3',u_4',u_5')$.

Permutons les vecteurs u_i' pour simplifier le passage à l'étape suivante en posant :

$$u_1^{(1)}=u_1'\ ,\ u_2^{(1)}=u_5'\ ,\ u_3^{(1)}=u_2'\ ,\ u_4^{(1)}=u_3'\ ,\ u_5^{(1)}=u_4'$$

On a toujours $F = \mathrm{Vect}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}, u_5^{(1)})$ et on a : $v(u_1^{(1)}) < v(u_2^{(1)}) \leq v(u_3^{(1)}) \leq v(u_4^{(1)}) \leq v(u_5^{(1)})$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)}, u_5^{(1)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} & u_4^{(1)} & u_5^{(1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Étape 3 : Nous utilisons $u_2^{(1)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants : la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}, u_5^{(2)})$ est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1^{(2)} = u_1^{(1)} & u_2^{(2)} = u_2^{(1)} & u_3^{(2)} = u_3^{(1)} - (3/2)u_2^{(1)} & u_4^{(2)} = u_4^{(1)} - (3/2)u_2^{(1)} & u_5^{(1)} = u_5^{(1)} + (1/2)u_2^{(1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}, u_5^{(2)})$ et on a : $v(u_1^{(1)}) < v(u_2^{(1)}) < v(u_3^{(1)}) \leq v(u_4^{(1)}) \leq v(u_5^{(1)})$.

Étape 4 : Nous utilisons $u_3^{(2)}$ pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, u_4^{(3)}, u_5^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1^{(3)} = u_1^{(2)} & u_2^{(3)} = u_2^{(2)} & u_3^{(3)} = u_3^{(2)} & u_4^{(3)} = u_4^{(2)} + u_3^{(2)} & u_5^{(3)} = u_5^{(2)} - u_3^{(2)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, u_4^{(3)}, u_5^{(3)})$ et on a : $v(u_1^{(3)}) < v(u_2^{(3)}) < v(u_3^{(3)})$ et $u_4^{(3)} = u_5^{(3)} = 0$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1^{(3)} = u_1^{(2)} & u_2^{(3)} = u_2^{(2)} & u_3^{(3)} = u_3^{(2)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

$F = \mathrm{Vect}(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)})$ et on a : $v(u_1^{(3)}) < v(u_2^{(3)}) < v(u_3^{(3)})$.

L'algorithme est terminé et $(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)})$ est une base de F. Ainsi,

$$(u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}) = (e_1 - e_2 + e_4, 2e_2, 4e_3 + 3e_4)$$

est une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. En particulier, la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est de rang 3.

En suivant les calculs, nous obtenons les relations :

$$u_2 + u_3 - 3u_5 = -2u_1 + u_4 - u_2 + 2u_5 = 0 \quad .$$

4.4 Algorithme pour déterminer les équations d'un sous-espace vectoriel

Dans cette sous-section, E désignera un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Nous rappelons que si $u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, où les $a_i \in \mathbf{K}$, nous avions noté (définition 4.3.1) :

$$v(u) = \inf\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tel que } a_i \neq 0\} \quad .$$

Considérons le système linéaire homogène de m équations linéaires à n inconnues.

$$(*) \quad \left[\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbf{K}$.

Notons F le sous-ensemble F de E constitué des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions du système $*$. Soit u et v sont dans F et $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit X et Y les les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$. X et Y sont donc des solutions de $*$. Comme les solutions de $*$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$, $X+Y$ et λX sont solutions de $*$. Or, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $u+v$ et λu sont $X+Y$ et λX. Ainsi, $u+v$ et λu sont dans F. Et donc, F est sous-espace vectoriel de E.

Remarque 4.4.1 *Le sous-ensemble F de E formés des vecteurs dont les coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ de E vérifient un système d'équations linéaires homogènes est un sous-espace vectoriel de E. Nous disons que ce système est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Plus généralement, définissons ce qu'est un système d'équations d'un sous-espace vectoriel relativement à une base $\mathcal{B}$.

Définition 4.4.2 *Soit E un K-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Nous appelons système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ un systéme homogène d'équations linéaires à n variables dont les solutions sont exactement les coordonnées des vecteurs de F.*

Exemple : Soit E un K-espace vectoriel de dimension trois et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ admet le système homogène :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

comme système d'équations relativement à la base $\mathcal{B}$. En effet, il est clair qu'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à F si et seulement si ses coordonnées sont égales, ce qui se traduit bien par :

$$x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = 0 \quad .$$

Considérons $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3)$. C'est une autre base de E. Nous constatons alors qu'un vecteur est dans F si et seulement si ses deuxième et troisième coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ sont nulles. Le système d'équations linéaires $x_2 = x_3 = 0$ est donc système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}'$. Cet exemple illustre la fait qu'un système d'équations d'un sous-espace vectoriel relativement à une base dépend beaucoup de cette base.

Proposition 4.4.3 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Tout sous-espace vectoriel F de E admet un système d'équations relativement à la base $\mathcal{B}$ formé de $n - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes à n variables.*

Preuve : D'après la proposition 4.2.1, F admet une base. En particulier, il existe $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E où $p \leq n$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. Nous allons alors expliciter , un algorithme donnant un systéme d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ formé de $n - \dim_{\mathbf{K}} F$ équations linéaires homogènes à n variables en fonction de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ce qui établira la proposition.

Lemme 4.4.4 *Soit $u_1, \ldots, u_p \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. On suppose $v(u_1) < \cdots < v(u_p)$. Soit $u \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$u \in F \quad \text{et} \quad x_{v(u_1)} = x_{v(u_2)} = \cdots = x_{v(u_p)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0 \quad .$$

Preuve : $\Longleftarrow$ Clair, puisque qu'un vecteur de E est nul si et seulement ses coordonnées dans une base sont nulles.
$\Longrightarrow$ Comme $u \in F$, il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_p \in K$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$. La $v(u_1)$-ème coordonnée de u est $\lambda_1 a_{v(u_1),1}$ où $a_{v(u_1),1} \neq 0$ est la $v(u_1)$-ème coordonnée de u_1 dans la base $\mathcal{B}$. Comme $x_{v(u_1)} = 0$, on en déduit $\lambda_1 = 0$. Itérons, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Donc, $u = 0$.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. Désignons par $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ la matrice dons la j-ème colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$. **Détaillons l'algorithme qui précisera à partir de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$.**

En utilisant l'algorithme du paragraphe 4.3, nous pouvons supposer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$v(u_1) < v(u_2) \cdots < v(u_p) \quad .$$

Notons $a_{d,i}$ la d-ème coordonnée de u_i dans la base $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Étape 1 : Nous utilisons u_1 pour "annuler" la $v(u_1)$-ème coordonnée de u.
Posons $u^{(1)} = u - \dfrac{x_{v(u_1)}}{a_{v(u_1),1}} u_1$. Par construction, la $v(u_1)$-ème coordonnée de $u^{(1)}$ dans la base $\mathcal{B}$ est nulle. De plus, comme que $u_1 \in F$, on a $u \in F$ si et seulement si $u^{(1)} \in F$. Nous noterons $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ les coordonnées de $u^{(1)}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Étape k : Nous disposons d'un vecteur $u^{(k)}$ de coordonnées $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifiant la condition $x_{v(u_1)}^{(k)} = \cdots = x_{v(u_k)}^{(k)} = 0$ et la condition $u \in F$ si et seulement si $u^{(k)} \in F$.

Pour passer à l'étape suivante, utilisons u_{k+1} pour "annuler" la $v(u_{k+1})$-ème coordonnée de $u^{(k)}$.
Posons pour cela $u^{(k+1)} = u^{(k)} - \dfrac{x_{v(u_{k+1})}^{k}}{a_{v(u_{k+1}),k+1}} u_{k+1}$. Par construction la $v(u_{k+1})$-ème coordonnée de $u^{(k+1)}$ est nulle. Comme $v(u_{k+1}) > v(u_k)$, les $v(u_1)$, ... , $v(u_k)$-ème coordonnées de $u^{(k+1)}$ restent nulles. Enfin, comme $u_{k+1} \in F$, on a $u^{(k)} \in F$ si et seulement si $u^{(k+1)} \in F$. Ainsi, nous sommes arrivés à l'étape $k+1$:

Étape k+1 : Soit $u^{(k+1)} = u^{(k)} - \dfrac{x_{v(u_{k+1}}^{k}}{a_{v(u_{k+1}),k+1}} u_{k+1}$ et notons $(x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors, nous avons $x_{v(u_1)}^{(k)} = \cdots = x_{v(u_{k+1})}^{(k+1)} = 0$ et nous avons $u \in F$ si et seulement si $u^{(k+1)} \in F$.

Itérons, nous arrivons à l'étape p.

Étape p : Nous disposons d'un vecteur $u^{(p)}$ de coordonnées $(x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)})$ dans la base $\mathcal{B}$ satifaisant $x_{v(u_1)}^{(p)} = \cdots = x_{v(u_p)}^{(p)} = 0$ et la condition $u \in F$ si et seulement si $u^{(p)} \in F$.

La condition $u \in F$ équivaut donc à $u^{(p)} \in F$. Comme

$$v(u_1) < \cdots < v(u_p) \quad ,$$

suivant le lemme 4.4.4, $u \in F$ équivaut donc à $u^{(p)} = 0$. Ainsi, $u \in F$ si et seulement si $x_j^{(p)} = 0$ pour $j \in \{1, \ldots, n\} - \{v(u_1), \ldots, v(u_p)\}$. Comme ces $x_j^{(p)}$ dépendent linéairement des coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de u dans la base $\mathcal{B}$, les équations $x_j^{(p)} = 0$ définissent un système de $n - p$ équations linéaires homogènes à n variables. Et $u \in F$ si et seulement si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de u sont solutions de ce linéaire homogène.

Ainsi, notre algorithme donne un système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$ constitué de $n - p$ équations linéaires homogènes à n variables où p est la dimension de F.

Exemple 1 : $E = \mathbf{R}^4$, $u_1 = (1, -1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 4, 3)$. Soit $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$. Nous nous proposons de donner un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$: $v(u_1) = 1$, $v(u_2) = 2$ et $v(u_3) = 3$. Soit u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$. .

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u \\ 1 & 0 & 0 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Étape 1 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u - x_1 u_1) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(1)} = u - x_1 u_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(1)} = u - x_1 u_1 \ .$$

Nous avons $u \in F$ équivaut à $u^{(1)} \in F$.

Étape 2 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u^{(1)} - (x_2 + x_1)u_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(1)} - (x_2 + x_1)u_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & x_3 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 + x_1)u_2 \ .$$

Nous avons : $u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 + x_1)u_2 = u - x_1u_1 - (x_2 + x_1)u_2$ et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} \in F$.

Étape 3 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u^{(2)} - (x_3/4)u_3) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u^{(3)} = u^{(2)} - (x_3/4)u_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 - x_1 - (3/4)x_3 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(3)} = u^{(2)} - (x_3/4)u_3 \ .$$

Nous avons : $u^{(3)} = u^{(2)} - (x_3/4)u_3 = u - x_1u_1 - (x_2 + x_1)u_2 - (x_3/4)u_3$, Les $v(u_1)$-ème, $v(u_2)$-ème et $v(u_3)$-ème coordonnées de $u^{(3)}$ sont nulles et $u \in F$ équivaut à $u^{(3)} \in F$.

L'algorithme est terminé. Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans F si et seulement si $u^{(3)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_4 - x_1 - (3/4)x_3 = 0 \quad .$$

C'est le système d'équations linéaires cherché. De plus, nous notons que si $u \in F$, $u^{(3)} = 0$ et :

$$u = x_1u_1 + (x_2 + x_1)u_2 + (x_3/4)u_3 \quad .$$

4.5 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Dans cette section, E désignera un **K**-espace vectoriel.

Définition 4.5.1 *(somme de deux sous-espaces vectoriels) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Notons :*

$$F + G = \{u + v \ ; \ u \in F \text{ et } v \in G\} \subset E \quad .$$

Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et de G.

Preuve : Comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$ et $0_E = 0_E + 0_E$, on a $0_E \in F + G$. Ainsi, $F + G$ est un ensemble non vide.

Soit $w_1, w_2 \in F + G$. Par définition, il existe $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$ tels que $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \\ &= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \quad . \end{aligned}$$

Or, $u_1 + u_2 \in F$, car F est un sous-espaces vectoriel de E et de même $v_1 + v_2 \in G$. Il en résulte $w_1 + w_2 \in F + G$.

Soit $w \in F + G$ et $\lambda \in K$. Par définition, il existe $u \in F$ et $v \in G$ tels que $w = u + v$. Ainsi, $\lambda w = \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$. Comme $\lambda u \in F$ et $\lambda v \in G$ (stabilité de F et G par multiplication par un scalaire), nous obtenons $\lambda w \in F + G$.

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4.5.2 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Nous disons que la somme $F + G$ est directe si tout $w \in F + G$ s'écrit de façon unique $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Cette somme est alors notée $F \oplus G$.*

Proposition 4.5.3 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

$$F + G \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\} \quad .$$

Preuve $\Longrightarrow$: Soit $u \in F \cap G$. Nous remarquons que $0_E = 0_E + 0_E = u + (-u)$. Or, $0_E, u \in F$ et $0_E, -u \in G$. Comme la somme $F+G$ est directe, nous obtenons : $0_E = u$ et $0_E = -u$. Ainsi, $u = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme $0_E \in F \cap G$, nous avons finalement $F \cap G = \{0_E\}$.

$\Longleftarrow$: Soit $w \in F+G$ et $w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ deux décompositions de w comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (c.a.d. $u_1, u_2 \in F$, $v_1, v_2 \in G$). Il en résulte $u_2 - u_1 = v_1 - v_2$. Or, $u_2 - u_1 = u_2 + (-u_1) \in F$ et de même $v_1 - v_2 \in G$. Ainsi : $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 \in F \cap G$. Donc, $u_2 - u_1 = v_1 - v_2 = 0_E$. Donc, $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$.

Définition 4.5.4 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Tout élément $w \in E$ s'écrit de façon unique $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.*
- $E = F \oplus G$.
- $E = F + G$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.

Nous disons alors que F et G sont supplémentaires dans E.

Lemme 4.5.5 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $F \cap G$. Complétons $(e_1, \ldots, e_r)$ en $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l)$ base de F et complétons $(e_1, \ldots, e_r)$ en $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ base de G. Alors, $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une base de $F + G$.*

Nous convenons de prendre $(e_1, \ldots, e_r)$ égal à l'ensemble vide si $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.

Preuve du lemme : Montrons que $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ engendre $F + G$. Soit $x \in F + G$, Par définition x s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Comme $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l)$ est une base de F, y s'écrit :

$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_r e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l \quad \text{où} \quad y_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une base de G, z s'écrit :

$$z = z_1 e_1 + \cdots + z_r e_r + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad \text{où} \quad z_j \in \mathbf{K} \quad .$$

Il en résulte :

$$x = y + z = (y_1 + z_1)e_1 + \cdots + (y_r + z_r)e_r + y_{r+1} f_1 + \cdots + y_{r+l} f_l + z_{r+1} g_1 + \cdots + z_{r+m} g_m \quad .$$

Ainsi, tout $x \in F + G$ est combinaison linéaire des vecteurs $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$.

Montrons maintenant que la famille $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est libre. Soit $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{K}$ tels que :

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l + z_1 g_1 + \cdots + z_m g_m = 0_E \quad .$$

Il en résulte

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l = -z_1 g_1 - \cdots - z_m g_m \in F \cap G \quad .$$

Ainsi, il existe $\lambda_i \in \mathbf{K}$ tels que

$$-z_1 g_1 - \cdots - z_m g_m = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \quad .$$

D'où :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r + z_1 g_1 + \cdots + z_m g_m = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est une famille libre, nous en déduisons que les z_i sont nuls. Il vient alors :

$$x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + y_1 f_1 + \cdots + y_l f_l = 0_E \quad .$$

Comme $(e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_l)$ est une base de F, il vient : $x_1 = \cdots = x_r = y_1 = \cdots = y_l = 0$. Cela montre que la famille $(e_1, \ldots, e_r, f_{r+1}, \ldots, f_l, g_{r+1}, \ldots, g_m)$ est libre.

En particulier, si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G.

Comme conséquence directe du lemme, nous obtenons :

Proposition 4.5.6 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E de dimension finie. On a :*

$$\dim_{\mathbf{K}}(F+G) = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G - \dim_{\mathbf{K}}(F \cap G) \quad .$$

Corollaire 4.5.7 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*- espace vectoriel E de dimension finie. Les trois conditions suivantes sont équivalentes*

- *F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E.*
- $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\} \quad .$
- $\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} F + \dim_{\mathbf{K}} G \quad \text{et} \quad E = F + G \quad .$

Proposition 4.5.8 *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel E de dimension finie. Alors, F et G sont supplémentaires si et seulement si la reunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E.*

Preuve : On a déjà vu que si la somme de F et de G est directe, une base de $F \oplus G$ s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. Cela donne que si F et G sont supplémentaires une base de E s'obtient par la réunion d'une base de F et d'une base de G. La réciproque est laissée au lecteur

5 Applications linéaires

5.1 Introduction

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle est compatible à l'addition et à la multiplication par un scalaire : pour tout u, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Soit alors $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si V est un sous-espace vectoriel de E, l'ensemble $f(V)$ des images par f des vecteurs de V est alors un sous-espace vectoriel de F. En particulier, l'ensemble des images de tous les vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de F appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.
- Si W est un sous-espace vectoriel de F, l'ensemble $f^{-1}(W)$ des vecteurs de E dont l'image par f est dans W est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est nulle est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f et noté $\ker f$.

Si le noyau de f est réduit au vecteur nul et que tout vecteur de F est image d'un vecteur de E par f, l'application f est bijective et identifie les vecteurs de E et les vecteurs de F. L'application inverse qui a un vecteur de F associe le vecteur de E dont il est l'image est elle même linéaire.

Lorsque E est de dimension finie, on a toujours :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \operatorname{Im} f \quad .$$

Supposons E munie d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$, on appelle matrice de f relativement à ces bases la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Cette matrice détermine les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par f d'un vecteur par multiplication à droite par les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. Une fois fixée les bases, associer à une application linéaire sa matrice est compatible aux opérations naturelles sur les applications linéaires : addition, multilication par un scalaire, composition, ...

Une famille d'exemple d'applications linéaires est donnée par les symétries ou les projections associées naturellement à deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel.

Objectif

- Comprendre les liens entre matrices et applications linéaires.
- Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans de nouvelles bases en fonction de sa matrice dans d'anciennes bases : $B = Q^{-1}AP$.
- Savoir calculer le noyau et l'image d'une application linéaire en fonction de sa matrice.
- Savoir déterminer une symétrie et une projection vectorielle

Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désignera au choix l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

5.2 Définitions

Définition 5.2.1 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, une application linéaire de E vers F est une application $f : E \to F$ vérifiant pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in K$:*

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda\, u) = \lambda f(u) \quad .$$

Si $f : E \to F$ est une application linéaire, nous noterons que pour tout $u_1, \dots, u_p \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$:

$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) \quad .$$

Nous noterons aussi que $f(0_E) = 0_F$ et que pour tout $u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$f(-u) = -f(u) \quad , \quad f(-\lambda u) = -\lambda f(u) \quad .$$

Notation 5.2.2 *Nous notons $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F et $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers E. Un élément de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est parfois appelé endomorphisme de E.*

Commençons par décrire les applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$.

Soit $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$. Et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$ (l'élément de la i ème ligne et de la j ème colonne de A).

Écrivons les éléments de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ en colonne. Cela revient à identifier $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$ respectivement aux matrices ayant une colonne et n lignes et une colonne et m lignes.

Associons à la matrice A, l'application $f : \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$ définie par :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad .$$

Il résulte par exemple des propriétés du produit matriciel que cette application est linéaire.

Notons que la matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ est caractérisée par l'application f de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$. En effet, Si e_j est le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$, $e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,1)$ où le 1 est a la j ème place :

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \qquad .$$

C'est la j ème colonne de A. Autrement dit, si deux matrices A et B définissent la même applciation linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$, alors $A = B$.

Inversement, si $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m$ est une application linéaire. Soit $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 1)$ le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$, notons $a_{i,j}$ la i ème coordonnée de $f(e_j)$ danns la base canonique de $\mathbf{K}^m$. Autrement dit :

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \quad .$$

Soit, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$. Par linéarité :

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Toutes les applications linéaires de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$ sont donc de la forme $*$. Ainsi, nous avons établi la proposition suivante :

Proposition 5.2.3 *Pour toute application lináire f de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^m$, il existe alors une unique matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ telle que f soit définie par :*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Nous verrons que A n'est autre que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}^m$.

Nous allons maintenant généraliser cette proposition.

Proposition 5.2.4 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ n vecteurs de E. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $f(e_i) = u_i$.*

Preuve par "analyse synthèse" :

Analyse : Soit f une telle application. Soit $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Comme f est linéaire, on obtient :

$$f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \quad .$$

L'application $f : E \to F$ est donc nécessairement l'application définie par $f(x) = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$. où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. L'application cherchée est donc unique. Il reste à vérifier que cette application convient.

Syntèse : Montrons que f convient. C'est à dire que $f(e_i) = u_i$ et que f est linéaire. Comme les coordonnées de e_i dans la base $\mathcal{B}$ sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est placé à la i-ème place, on a bien :

$$f(e_i) = 0u_1 + \ldots + 0u_{i-1} + 1u_i + 0u_{i+1} + \ldots + 0u_n$$

ainsi $f(e_i) = u_i$.

Il reste à montrer que cette application f est linéaire. Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur $x + y$ a pour coordonnées $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur λx a pour coordonnées $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl}
f(x+y) & = & (x_1 + y_1)u_1 + \ldots + (x_n + y_n)u_n \\
 & = & (x_1u_1 + \dots + x_nu_n) + (y_1u_1 + \dots + y_nu_n) \\
 & = & f(x) + f(y) \\
f(\lambda x) & = & \lambda x_1u_1 + \dots + \lambda x_nu_n \\
 & = & \lambda(x_1u_1 + \dots + x_nu_n) \\
 & = & \lambda f(x)
\end{array}$$

Ainsi, f convient, f est linéaire et la proposition est démontrée.

Définition 5.2.5 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$. Nous appelons matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

Nous disons que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ est la matrice de f avec comme base d'arrivée $\mathcal{B}'$ et base de départ $\mathcal{B}$.

Proposition 5.2.6 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ de F.*

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Alors :

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})X \quad .$$

Preuve : Soit $a_{i,j}$ le terme de i-ème ligne et de la j-ème colonne de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Ecrivons en colonnes les coordonnées d'un vecteur. Par définition, les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \quad .$$

Par linéarité de f :

$$f(u) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \ldots + x_nf(e_n) \quad .$$

Passons cette égalité en coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Définition 5.2.7 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$. Nous appelons matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice notée $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est appelée matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

Suivant la proposition 5.2.6, nous obtenons

Corollaire 5.2.8 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Nous supposons donnée une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E .*
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées du vecteur $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Alors :

$$Y = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})X \quad .$$

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une famille d'éléments de K, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ la matrice de terme général $a_{i,j}$ et f l'application linéaire

$$f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^m \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

où les éléments de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ sont écrits en colonne. Alors, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

n'est autre que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^m$ et $\mathbf{K}^n$.
En effet, si $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 1)$ le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$, $f(e_j) = (a_{1,j} \dots a_{m,j})$.

Exemple : Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $\epsilon_1 = (1, 1)$ et $\epsilon_2 = (1, 17)$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = \epsilon_1$ et $f(e_2) = \epsilon_2$. Déterminer la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ de f dans la base $\mathcal{B}$.

Les coordonnées de ϵ_1 et et ϵ_2 dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement $(1, 1)$ et $(1, 17)$. Autrement dit, $\epsilon_1 = e_1 + e_2$ et $\epsilon_2 = e_1 + 17e_2$. Nous obtenons :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Rappelons que nous avions appelé matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont i-ème colonne est formée des coordonnées de e'_i dans la base $\mathcal{B}$. La matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

L'interêt de cette matrice est que si X est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, on a :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X \quad .$$

Proposition 5.2.9 *Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases respectivement de E et F et $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)$ la matrice de f avec base de départ $\mathcal{B}_1$ et base d'arrivée $\mathcal{B}'_1$. Soit $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ deux nouvelles bases respectivement de E et F et $B = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2)$ la matrice de f avec la nouvelle base de départ $\mathcal{B}_2$ et la* *nouvelle base d'arrivée $\mathcal{B}'_2$. Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}'_1$ à la base $\mathcal{B}'_2$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$, alors :*

$$B = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QBP^{-1} \quad .$$

Preuve : Soit en colonne X_1 et X_2 les coordonnées d'un vecteur u de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et Y_1 et Y_2 les coordonnées du vecteur $f(u)$ de E respectivement dans les bases $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$. On a :

$$Y_1 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)X_1 \quad , \quad X_1 = PX_2 \quad , \quad Y_2 = Q^{-1}Y_1 \quad .$$

Ainsi :

$$Y_2 = Q^{-1}Y_1 = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)X_1) = Q^{-1}(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)(PX_2)) = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P\,X_2 \quad .$$

L'application qui a X_2 associe Y_2 est définie par :

$$Y_2 = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2)X_2 = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P\,X_2 \quad ,$$

Elle est linéaire.Nous en déduisons de la proposition 5.2.3 :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2) = Q^{-1}\mathcal{M}(f, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1)P \quad .$$

Corollaire 5.2.10 *Soit E un* **K***-espace vectoriel, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une deuxième base de E (dite nouvelle base). Soit P la matrice de changement de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la $\mathcal{B}_2$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$. Alors :*

$$B = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PBP^{-1} \quad .$$

5.3 Noyau et Image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application.

Rappelons que si A est un sous-ensemble de E, nous notons $f(A)$ le sous-ensemble de F :

$$f(A) = \{f(a) \quad \text{tels que} \quad a \in A\} \subset F.$$

Ce sous-ensemble est appelé image de A par f.

Rappelons que si B est un sous-ensemble de F, nous notons $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E :

$$f^{-1}(B) = \{a \in E \quad \text{tels que} \quad f(a) \in B\} \subset E.$$

Ce sous-ensemble est appelé image inverse de B par f. Il s'agit d'une notation et cet ensemble est défini même si f n'est pas bijective.

Proposition 5.3.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.*
1) Pour tout sous-espace vectoriel V de E, $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2) Pour tout sous-espace vectoriel W de F, $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve de 1) : L'ensemble $f(V)$ est non vide, car $0_E \in V$ et donc $f(0_E) = 0_F \in f(V)$.

Soit $y, y' \in f(V)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Par définition de $f(V)$, il existe x et $x' \in V$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Nous avons alors en utilisant la linéarité de f :

$$y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x') \quad \text{et} \quad \lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x) \quad .$$

Comme V est un sous-espace vectoriel, $x + x'$ et λx sont des vecteurs de V. Il en résulte que et $y + y'$ et λy appartiennent à $f(V)$. Ainsi, $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve de 2) : L'ensemble $f^{-1}(W)$ est non vide, car $f(0_E) = 0_F \in W$. Ainsi, $0_E \in f^{-1}(W)$.

Soit $x, x' \in f^{-1}(W)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ainsi, $f(x), f(x') \in W$. Comme f est linéaire, $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Comme W est un sous-espace vectoriel, nous en déduisons $f(x+x'), f(\lambda x) \in W$. Il en résulte que $x + x', \lambda x \in f^{-1}(W)$. Donc, $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 5.3.2 *(Image d'une application linéaire) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle image de f et on note* $\operatorname{im} f$ *le sous-espace vectoriel de F :*

$$\operatorname{im} f = \{f(u) \text{ tels que } u \in E\} \subset F \quad .$$

Définition 5.3.3 *(Noyau d'une application linéaire) Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle noyau de f et on note* $\ker f$*, le sous-espace vectoriel de E :*

$$\ker f = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = 0_F\} \subset E \quad .$$

Justification : Notons que $\operatorname{im} f = f(E)$. Comme E est espace vectoriel, il résulte de la proposition 5.3.1 que l'image de f, est un sous-espace vectoriel. Notons que $\ker f = f^{-1}(\{0_F\}$. Comme $\{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de F, il résulte de la proposition 5.3.1 que $\ker f$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5.3.4 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

$$f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{im} f = F \qquad \text{et} \qquad f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker f = \{0_E\} \quad .$$

Preuve : La première assertion résulte de la définition de la surjectivité.

Montrons la deuxième assertion. Supposons injective. Comme $f(0_E) = 0_F$ et que f est injective, c'est que 0_E est la seule solution de $x \in E$ et $f(x) = 0_F$. Donc, $\ker f = \{0_E\}$. Supposons maintenant que $\ker f = \{0_E\}$. Soit $y \in F$ et $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') = y$. Nous obtenons, $f(x) - f(x') = 0$. Il résulte de la linéarité de f que $f(x - x') = 0$. Ainsi, $x - x' \in \ker f = \{0_E\}$ et donc $x = x'$. Ainsi, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution. L'application f est donc injective.

Proposition 5.3.5 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ et $v_1, v_2, \ldots, v_p \in E$. Alors :*

$$f(\operatorname{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)) = \operatorname{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)) \quad .$$

Autrement dit, si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ engendrent un sous-espace vectoriel G de E, les vecteurs $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p)$ engendrent le sous-espace vectoriel $f(G)$ de F.

Preuve : Si $y \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, le vecteur y s'écrit $y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ avec $\lambda_i \in \mathbf{K}$. Nous avons par linéarité de f : $f(y) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. Ainsi, $f(y) \in \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$.
Inversement, si $y \in \mathrm{Vect}(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_p f(v_p)$. D'où, puisque f est linéaire, $y = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p)$. Or, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ et donc $y \in f(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p))$. Nous avons ainsi montré l'égalité cherchée.

Proposition 5.3.6 *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$.*

1. *Supposons f injective : Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre, la famille $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre de F.*

2. *Supposons f surjective : Si $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ engendrent E, $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ engendrent F.*

3. *Si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F.*

Preuve de 1) : Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $\lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_p f(u_p) = 0_F$. Puisque f est linéaire, nous avons donc : $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p) = 0_F$. Puisque, f est injective, nous obtenons $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$. La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ étant libre, il en résulte $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. Cela assure que $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre

Preuve de 2) : Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Puisque $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ engendrent E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in K$ tels que $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l$. Ainsi,

$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l) \quad .$$

L'application f étant linéaire, nous obtenons : $y = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_l f(v_l)$. Cela montre que tout y de F est combinaison linéaire de $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l)$. La famille $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_l))$ engendrent donc F.

Preuve de 3) : Résulte de 1 et 2.

Proposition 5.3.7 *(dimension de la source, du noyau et de l'image) Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Nous suppoons E de dimension n et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. Alors :*

$$n = \dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f \quad .$$

Preuve : L'espace vectoriel E admet une base de cardinal n. Nous avons vu alors que tout sous-espace vectoriel de E admet une base et que toute base d'un sous-espace vectoriel de E peut être complété en une base de E. Appliquons cette remarque à $\ker f$. Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de $\ker f$. Complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ base de E. Notons que $f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n) \in \mathrm{im}\, f$ et montrons que $(f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}\, f$.

Soit $y \in \mathrm{im}\, f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. En utilisant la linéarité de f et le fait que $e_1,\ldots,e_p$ sont des vecteurs de $\ker f$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y &= f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) \\ &= x_{p+1}f(e_{p+1}) + \cdots + x_nf(e_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $(f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}\, f$. Montrons que $(f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n))$ est une famille libre. Soit $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_{p+1}f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_nf(e_n) = 0$. Comme f est linéaire, on obtient : $f(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_ne_n) = 0$. Ainsi, $\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_ne_n \in ker f$. Comme $(e_1,\ldots,e_p)$ est une base de $\ker f$, il existe $\mu_1,\ldots,\mu_p \in \mathbf{K}$ tels que

$$\lambda_{p+1}e_{p+1} + \cdots + \lambda_ne_n = \mu_1e_1 + \cdots + \mu_pe_p \quad .$$

D'où :

$$\mu_1e_1 + \cdots + \mu_pe_p - \lambda_{p+1}e_{p+1} - \cdots - \lambda_ne_n = 0 \quad .$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, c'est une famille libre. En particulier, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Nous avons ainsi montré que la famille $(f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n))$ est libre.

En conclusion, $(f(e_{p+1}),\ldots,f(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}\, f$. Ainsi, $\mathrm{im}\, f$ est de dimension $n-p$ et

$$\dim_{\mathbf{K}} \ker f + \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = p + (n-p) = n = \dim_{\mathbf{K}} E \quad .$$

Corollaire 5.3.8 *Soit E et F deux* **K**-*espaces vectoriels de* **même dimension**. *Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injectice.*
2. *f est surjective.*
3. *f est bijective.*

Preuve $1 \Longrightarrow 2$ **:** Si f est injective, $\ker f = \{0_E\}$. Donc, $\dim_{\mathbf{K}} \ker f = 0$. Il résulte de la formule de dimension de la proposition 5.3.7 :

$$\dim_{\mathbf{K}} E = \dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f$$

Comme E et F, ont même dimension $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} F$. Ainsi, $\mathrm{im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F qui a la même dimension que F. Il en résulte $\mathrm{im}\, f = F$. C'est à dire (voir proposition 5.3.4) : f surjective.

Preuve $2 \Longrightarrow 3$ **:** Si f est surjective, $\mathrm{im}\, f = F$ et $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} F$. Comme E et F, ont même dimension, on obtient $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{im}\, f = \dim_{\mathbf{K}} E$. Il résulte de la formule de dimension de la proposition 5.3.7 : $\dim_{\mathbf{K}} \ker f = 0$. Ainsi, $\ker f = \{0_E\}$. Il résulte encore de la proposition 5.3.4 que f est injective. Étant injective et surjective, f est donc bijective.

Preuve $3 \Longrightarrow 1$ **:** Si f est isomorphisme, f est bijective et en particulier injective.

Cela montre que les trois propriétés sont équivalentes.

Soit E, F deux **K**-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Nous allons montrons commment déterminer l'image de f à partir de $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Détermination de l'image de f **:** Par définition, $\mathrm{im}\, f = f(E)$. Il résulte de la proposition 5.3.5 que $\mathrm{im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1, \ldots, f(e_n))$. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$

n'est autre que $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$. Ainsi, l'algorithme de la section 4.3 nous fournit à partir de la $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ une base échelonnée de $\operatorname{im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1,\dots,f(e_n))$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$. Nous obtenons en particulier la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{im} f$. L'algorithme de la section 4.4 nous permet aussi de déduire de cette base échelonnée de $\operatorname{im} f$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ un système d'équations de $\operatorname{im} f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

La formule liant la dimension de la base, du noyau et de l 'image donnera alors la dimension du sous-espace vectoriel $\ker f$. Comme l'algorithme de la section 4.3 donne des relations entre les vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_n)$, nous en déduisons de ces relations des vecteurs de $\ker f$. Cela donne une manière de déterminer une base de $\ker f$

En particulier, l'algorithme de la section 4.3 permet de décider à partir de $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ si f est injective ou surjective.

Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1,\dots,e'_m)$ une base de F, $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$. Nous allons montrons commment déterminer le noyau de f à partir de $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Détermination du noyau de f : Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont

$$Y = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, x est dans le noyau de f si et seulement $Y = 0$. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$, nous obtenons alors que le système d'équations homogènes de m équations à n variables :

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

est un systéme d'équations de $\ker f$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Résolvons ce systéme homogéne par l'algorithme de la sous-section 1.8, nous obtenons une base de $\ker f$ échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Par la formule liant la dimension de E, du noyau et de l 'image, nous en déduirons la dimension de $\operatorname{im} f$.

Exemple : Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Préciser $\operatorname{im} f$ et $\ker f$.

Méthode 1 **:** L'image de f est donc le sous-espace vectoriel engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 2 :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - 2f(e_1) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 3 :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2) - f(e_1), f(e_3) - 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_1)) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) - f(e_1) & f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Nous obtenons ainsi que $(f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, f(e_2) - f(e_1) = -2e_2 - 2e_3$ est une base échelonnée de $\operatorname{im} f$ relativement à $\mathcal{B}$. Ainsi, l'image de f est de dimension 2. Il en résulte que le noyau de f est de dimension 1.

Or, nous avons $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = 0$. Comme $f(e_3) - f(e_1) - f(e_2) = f(e_3 - e_1 - e_2)$, il en résulte que $e_3 - e_1 - e_2$ est un vecteur de $\ker f$. Ce vecteur est non nul, le noyau est de dimension 1. Donc, $e_3 - e_1 - e_2$ est une base de $\ker f$.

Méthode 2 **:** Si u est de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, un système d'équations de $\ker f$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Résolvons ce système. Utilisant notre algorithme de résolution, nous obtenons le systéme triangulé ayant mêmes solutions :

$$(*) \quad \left[\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -2x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système admet x_3 comme seule variable libre. Nous obtenons : $x_2 = -x_3$, puis $x_1 = -x_3$. Ainsi, les coordonndes des vecteurs de $\ker f$ sont :

$$\{x_3(-1, -1, 1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous en déduisons :

$$\ker f = \{x_3(-e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Le vecteur $-e_1 - e_2 + e_3$ est une base de $\ker f$. Cela nous apprend que le noyau de f est de dimension 1, son image est donc de dimension 2. Pour déterminer une base l'image de f, il suffit de donner deux vecteurs indépendants de cette image. Nous pourrons vérifier par exemple que $f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 + e_3$ forment une famille libre. C'est donc une base de $\mathrm{im}\, f$.

5.4 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 5.4.1 *Soit E, F, G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$, l'application composée $g \circ f$ est linéaire.*

Preuve : Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. En utilisant successivement la définition de $g \circ f$, la linéarité de f, puis de g et la définition de $g \circ f$, nous obtenons :

$$(g \circ f)(u+v) = g(f(u+v)) = g(f(u)+f(v)) = g(f(u)) + g(f(v)) = (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$$
$$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda\, f(u)) = \lambda\, g(f(u))) = \lambda\, (g \circ f)(u) \quad .$$

Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. Nous notons $f_1 + f_2$ et λf_1, les applications :

$$f_1 + f_2 : E \longrightarrow F \quad , \quad u \longmapsto (f_1+f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u)$$
$$\lambda f_1 : E \longrightarrow F \quad , \quad u \longmapsto (\lambda\, f_1)(u) = \lambda(f_1(u)) \quad .$$

Proposition 5.4.2 *Soit $f_1 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), \lambda \in \mathbf{K}$. Les applications $f_1 + f_2$ et λf_1 sont linéaires. Munis de ces opérations, $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Laissée au lecteur. On notera que le vecteur nul de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $0 : E \to F$, qui associe à tout vecteur u de E le vecteur nul de F. L'opposée de l'application $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ est l'application $-f : E \to F$ définie par $f(u) = -f(u)$.

Proposition 5.4.3 *Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $\lambda \in K$. Soit $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E',E)$ et $l \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,F')$:*

$$l \circ (f_1 + f_2) = l \circ f_1 + l \circ f_2 \quad , \quad (f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h \quad .$$

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F), g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G), \lambda \in \mathbf{K}$:

$$g \circ (\lambda f) = (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) \quad .$$

Remarque 5.4.4 *L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est muni de trois opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition. A la vue des propriétés de l'addition et la composition nous disons que $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ d'une structure d'anneau unitaire d'unité* Id_E. .

Si $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, notons que nous n'avons pas en général $g \circ f = f \circ g$.

Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$, nous notons $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ la composée de k fois l'application f par elle même.

Proposition 5.4.5 *Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ est bijective, l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est alors linéaire : $f^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F, E)$. Nous disons alors que f est un isomorphisme linéaire et que E et F sont isomorphes.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ bijective. Rappelons que cela signifie que pour tout $v \in F$, il existe un unique vecteur de E tel que $f(u) = v$. L'application réciproque est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui associe à un vecteur $v \in F$ le seul vecteur $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Nous devons montrer que f^{-1} est linéaire. Soit $v, v' \in F$ et $\lambda \in K$. Notons $u = f^{-1}(v)$ et $u' = f^{-1}(v')$. Comme $f(u + u') = f(u) + f(u') = v + v'$, il vient $u + u' = f^{-1}(v + v')$. Ainsi, $f^{-1}(v + v') = f^{-1}(v) + f^{-1}(v')$. De même, $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v$. Ainsi, $f^{-1}(\lambda v) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$. Cela montre que l'application f^{-1} est linéaire.

Notation 5.4.6 *Nous notons $\mathrm{Gl}_{\mathbf{K}}(E) \subset \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de E vers E qui est appelé le groupe linéaire.*

Exemples d'isomorphismes linéaires : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application :

$$E \longrightarrow \mathbf{K}^n \ , \ u \longmapsto \text{ les coordonnées de u dans la base } \mathcal{B}$$

est un isomorphisme linéaire. Son application inverse est l'application :

$$\mathbf{K}^n \longrightarrow E \ , \ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad .$$

Une conséquence est que deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension sont toujours isomorphes.

Proposition 5.4.7 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:*

$$\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) + \mathcal{M}(g,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad .$$

Si G est un troisième espace vectoriel, $\mathcal{B}''$ une base de G et $g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(F,G)$:

$$\mathcal{M}(g\circ f,\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \quad .$$

Preuve : Le premier point provient du fait que si e_i est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $(f+g)(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en ajoutant les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ à ceux de $g(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Le deuxième point provient du fait que si e_i est un vecteur de $\mathcal{B}$, les coordonnées de $\lambda f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'obtiennent en multipliant par λ les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Montrons plus précisement le troisième point. Soit $a_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$, $b_{i,j}$ le terme général de la matrice $\mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$ $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_m)$, et $\mathcal{B}'' = (e''_1,\ldots,e''_p)$.

$$\begin{aligned}
g\circ f(e_i) &= g(a_{1,i}e'_1 + \cdots + a_{m,i}e'_m) \\
&= a_{1,i}g(e'_1) + \cdots + a_{m,i}g(e'_m) \\
&= a_{1,i}(b_{1,1}e''_1 + \cdots + b_{p,1}e''_p) + \cdots + a_{m,i}(b_{1,m}e''_1 + \cdots + b_{p,m}e''_p) \\
&= (b_{1,1}a_{1,i} + \cdots b_{1,m}a_{m,i})e''_1 + \cdots + (b_{p,1}a_{1,i} + \cdots + b_{p,m}a_{m,i}
\end{aligned}$$

Or, par définition du produit ligne colonne le terme général de la matrice produit $\mathcal{M}(g,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')\mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$ est $b_{j,1}a_{1,i} + \cdots + b_{j,m}a_{m,i}$. La troisième assertion de la proposition en résulte.

En particulier, si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E, si $f,g,h \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$:

$$\mathcal{M}(f+g,\mathcal{B}) = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}) + \mathcal{M}(gf,\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{M}(\lambda f,\mathcal{B}) = \lambda\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) \quad , \quad \mathcal{M}(g\circ f,\mathcal{B}) = \mathcal{M}(g,\mathcal{B})\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$$

Proposition 5.4.8 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_m)$ une base de F. L'application :*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) \quad , \quad f \longmapsto \mathcal{M}(f,\mathcal{B}',\mathcal{B})$$

est un isomorphisme.

Idée de la Preuve : la linéarité de notre application résulte de la proposition précédente. La bijectivité résulte de la proposition 5.2.4.

En particulier, avec els notations de la propsition : deux applications $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ sont égales si et seulement si leurs matrices $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ sont égales.

Remarque 5.4.9 Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. La matrice de Id_E dans toutes les bases de E est la matrice Id_n. La matrice de l'application nulle est la matrice nulle.

Proposition 5.4.10 *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E. un endomorphisme $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. Nous avons alors $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$*

Preuve : Si f est un isomorphisme, en utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B})\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f^{-1} \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Ainsi, $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible. et $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$.

Si $\mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ est inversible, d'après la proposition 5.4 il existe un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ tel que $\mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})^{-1}$. En utilisant la proposition , on obtient :

$$\mathcal{M}(g \circ f, \mathcal{B}) = \mathcal{M}(f \circ g, \mathcal{B}) = \mathrm{Id}_n \quad .$$

Or, Id_n est la matrice de Id_E dans la base $\mathcal{B}$. On déduit de la proposition : $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Cette propriété assure que f est bijective d'application réciproque g.

Pour fiir ce paragraphe, donnons une preve du résultat suivant :

Proposition 5.4.11 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}$. Le système d'équations linéaires associé à l'équation* $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *admet* $(0, \dots, 0)$ *comme unique solution si et seulement si la matrice A est inversible.*

Preuve : Supposons que l'équation homogène ait une unique solution. Considérons l'application linéaire associèe à la matrice A:

$$f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad .$$

Par hypothése, cette application est injective. Comme i ls'agit d'une applciatiion de $\mathbf{K}^n$ vers lui même elle est donc bijective (corollaire 5.3.8). Sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ étant A, suivant la propositon 5.4.10 la matrice A est inversible. Inversement, voir la proposition 2.5.1.
Une deuxième preuve sera donnée dans le section 6 sujet d'etudes sur els matrices èlèmentaires.

5.5 Projection et symétrie vectorielle

Définition 5.5.1 *(projection et symétrie) Soit E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un* $\mathbf{K}$-*espace vectoriel E : $E = E_1 \oplus E_2$. Tout vecteur u de E s'écrit donc de façon unique $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.*
1) L'application $p : E \to E\,,\ u \mapsto p(u) = u_1$ est linéaire. Elle est appelée projection sur E_1 parallélement à E_2.

$$\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker p = E_2 \quad \text{et} \quad p^2 = p \quad .$$

2) L'application $s : E \to E\,,\ u \mapsto s(u) = u_1 - u_2$ est linéaire. Elle est appelée symétrie par rapport à E_1 parallélement à E_2.

$$\ker(s - \mathrm{Id}_E) = E_1 \quad , \quad \ker(s + \mathrm{Id}_E) = E_2 \quad \text{et} \quad s^2 = \mathrm{Id}_E \quad .$$

En particulier, s est un isomorphisme linéaire et $s^{-1} = s$.

Exermple : Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $D = \text{Vect}((1, 1, 1))$ la droite vectorielle de base $(1, 1, 1)$.
1) Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2) Expliciter la symétrie par rapport P parallélement à D. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$?

1) Par résolution de l'équation $x+y+z = 0$, on obtient que P est un plan vectoriel de base $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Ainsi, $\dim P + \dim D = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbf{R}^3$. Pour montrer que P et D sont supplémentaires, il reste à montrer que $P \cap D = \{0\}$ Soit $u \in P \cap D$. Exprimons que $u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda(1, 1, 1)$. D'où, $u = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Comme $u \in P$, les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ vérifie l'équation de P. Ainsi, $\lambda + \lambda + \lambda = 0$, soit $3\lambda = 0$. D'où $\lambda = 0$ et $u = 0$. Donc, $P \cap D = \{0\}$ et $\mathbf{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, u s'écrit de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in P$ et $u_2 \in D$. Comme $u_2 \in D$, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u_2 = \lambda(1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Il vient $u_1 = u - u_2 = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in P$. Il en résulte : $x - \lambda + y - \lambda + z - \lambda = 0$. Soit : $\lambda = (1/3)(x + y + z)$ et

$$u_2 = \frac{1}{3}(x + y + z)(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad u_1 = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right) \quad .$$

La symétrie par rapport à P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$s : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u = (x, y, z) \longmapsto u_1 - u_2 = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3}\right) \quad .$$

La projection sur P parallélement à D est donc l'application linéaire :

$$p : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad , \quad u = (x, y, z) \longmapsto u_1 = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right) \quad .$$

La matrice de s dans la base canonique est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

6 Sujet d'études : matrices élémentaires

6.1 Introduction

Par multiplication à gauche les matrice él
'ementaires tarnsfoement les lignes d'une matrice :

- multiplication d'une ligne par un èlément non nul de $\mathbf{K}$,
- retrancher à une ligne le produit d'une autre par un èl'ement de $\mathbf{K}$,
- permutation de deux lignes.

Nous développons un algorithme qui permet déterminer si une matrice est inversible et si oui de calculer son inverse. Cet algorithme permet aussi de décomposer toute matrice inversible en produit de matrices èlémentaires.

Objectif :

- Savoir préciser les coefficients d'une matrice élémentaire.
- Savoir utilser l'algoritme qui permet de calculer l'inverse d'une matrice inversible.

Dans ce cours, $\mathbf{K}$ désignera toujours soit l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. ou plus généralement ce que les mathématiciens appelent un corps commutatif.

6.2 Matrices élémenataires

Proposition 6.2.1 *(***Définition de** $D_i(a)$*) Soit $n \geq 1$ un entier, i un entier compris entre 1 et n. Soit a un élément de $\mathbf{K}$. Il existe une unique matrice $D_i(a)$ carrée de taille n telle que pour tout entier $p \geq 1$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $D_i(a)M$ se déduit de M en multipliant la i-ème ligne de M par a sans changer les autres lignes.*

Preuve : Si $D_i(a)$ existe, $D_i(a) = D_i(a)I_n$. Ainsi, $D_i(a)$ est la matrice diagonale définie par $a_{i,i} = a$ et $a_{i,j} = 1$ si $j \neq i$. Il reste à voir que cette matrice convient.

Proposition 6.2.2 (**Définition de** $T_{i,j}(\lambda)$) *Soit $n \geq 1$ un entier, i, j des entiers distincts compris entre 1et n et λ un élément de $\mathbf{K}$. Il existe une unique matrice $T_{i,j}(\lambda)$ carrée de taille n telle que pour tout entier $p \geq 1$ et toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $T_{i,j}(\lambda)M$ se déduit de M en ajoutant à la i-ème ligne de M le produit par λ de la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.*

Preuve : Si $T_{i,j}(\lambda)$ existe, $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(\lambda)I_n$. Ainsi, les termes diagonaux de la matrice $T_{i,j}(\lambda)$ sont égaux à 1 et le seul terme non diagonal non nul est λ placé à la i-ème ligne et j-ème colonne. Il reste à voir que cette matrice convient.

Proposition 6.2.3 (**Définition de** $S_{i,j}$) *Soit $n \geq 1$ un entier et i, j des entiers distincts compris entre 1et n. Il existe une unique matrice $S_{i,j}$ carrée de taille n telle que pour tout entier $p \geq 1$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, la matrice produit $S_{i,j}M$ se déduit de M en permutant la i-ème ligne et la la j-ème ligne de M sans changer les autres lignes.*

Preuve : La matrice $S_{i,j}$ est définie par son action sur I_n : $S_{i,j} = S_{i,j}I_n$. Il reste à voir que cette matrice convient.

Définition 6.2.4 (**Matrices élémentaires**) *Les matrices $D_i(a)$ pour $a \neq 0$, $T_{i,j}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et $S_{i,j}$ sont appelées matrices élémentaires.*

Exemple Pour $n = 2$ et tout $a \in \mathbf{K}$:

$$D_1(a) = D_1(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad , \quad D_2(a) = D_2(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} .$$

$$T_{1,2}(a) = T_{1,2}(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T_{2,1}(a) = T_{2,1}(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} .$$

$$S_{1,2} = S_{2,1} = S_{1,2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 3$ et tout $a \in \mathbf{K}$:

$$D_3(a) = D_3(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

De même, nous obtenons :

$$D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$T_{1,3}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T_{3,1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T_{2,3}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T_{3,1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad .$$

$$T_{1,2}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ T_{2,1}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$S_{1,2} = S_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad S_{2,3} = S_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_{1,3} = S_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.2.5 *La transposée d'une matrice élémentaire est élémentaire : les matrices $D_i(a)$ et $S_{i,j}$ sont symétriques. la transposée de $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{j,i}(\lambda)$.*

Nous pouvons en déduire :

Proposition 6.2.6 *Soit $n \geq 1$ un entier, i un entier compris entre 1et n. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$:*

- *La matrice produit $MD_i(a)$ se déduit de M en multipliant la i-ème colonne de M par a sans changer les autres colonnes.*
- *La matrice produit $MT_{j,i}(\lambda)$ se déduit de M en ajoutant à la i-ème colonne de M le produit par λ de la j-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.*
- *La matrice produit $MS_{i,j}$ se déduit de M en permutant la i-ème colonne et la la j-ème colonne de M sans changer les autres colonnes.*

Proposition 6.2.7 *Les matrices élémentaires sont inversibles :*

- *Soit a un élément de $\mathbf{K}$ non nul, $D_i(a)$ est inversible et $D_i(a)^{-1} = D_i(\frac{1}{a})$.*
- *Soit λ un élément de $\mathbf{K}$, $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.*
- *$S_{i,j}$ est inversible et $S_{i,j}^{-1} = S_{i,j}$.*

Preuve : Montrons par exemple que $D_i(\frac{1}{a})D_i(a) = I_n$. La i-ème ligne de ce produit est le produit par $1/a$ de la i-ème ligne de $D_i(a)$. Comme $D_i(a) = D_i(a)I_n$, la i-ème ligne de $D_i(a)$ est a fois la i-ème ligne de I_n. Ainsi, la i-ème ligne $D_i(\frac{1}{a})D_i(a)$ est la i-ème ligne de I_n. Pour tout j entier différent de i et compris entre 1 et n, la j-ème ligne de $D_i(\frac{1}{a})D_i(a)$ est j-ème ligne de $D_i(a)$. Comme $D_i(a) = D_i(a)I_n$, la j-ème ligne de $D_i(a)$ est la j-ème ligne de I_n. Ainsi, $D_i(\frac{1}{a})D_i(a)$ et I_n sont deux matrices qui ont les mêmes lignes. Elles sont donc égales.

Définition 6.2.8 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Nous disons que M est inversible à gauche, s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AM = I_n$. Nous disons que M est inversible à droite, s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$.*

Nous pouvons observer qu'une matrice inversible est est à fortiori inversible à gauche et inversible à droite. Inversement, une matrice inversible à gauche et inversible à droite est inversible. Dans ce paragraphe, nous montrerons l'équivalence les trois notions : être inversible à gauche, être inversible à droite et être inversible.

Lemme 6.2.9 *Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles à gauche est inversible à gauche. Le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles à droite est inversible à droite.*

Preuve : Soit M, N, A, B quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tels que $AM = I_n$ et $BN = I_n$. Nous avons alors :

$$BAMN = B(AM)N = BI_nN = BN = I_n \quad .$$

Ainsi, si M et N sont inversibles à gauche, il en est de même de MN. De même, nous montrons que le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles à droite est inversible à droite. .

Lemme 6.2.10 *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à droite n'a pas de ligne nulle. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ inversible à gauche n'a pas de colonne nulle.*

Preuve : Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit inversible à droite et que sa i-ème ligne soit nulle. Par définition de l'inversibilité à droite, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$. Suivant la définition du produit matriciel, la a i-ème ligne de MB serait nulle. C'est impossible puisque la i-ème ligne de I_n n'est pas nulle. Même raisonnement pour l'assertion sur les matrices inversibles à droite.

En multipliant à gauche une matrice M par un produit de matrices élémentaires, nous pouvons changer l'ordre de ses lignes , multiplier des lignes par des éléments non nuls de $\mathbf{K}$, retrancher à ses lignes le produit par des éléments de $\mathbf{K}$ d'une ligne sélectionnée. Nous appelons ces opérations des opérations élémentaires sur les lignes de M. De même en multipliant à droite une matrice M par un produit de matrices élémentaires, nous pouvons changer l'ordre de ses colonnes, multiplier des colonnes par des éléments non nuls de $\mathbf{K}$, retrancher à des colonnes le produit par des éléments de $\mathbf{K}$ d'une colonne sélectionnée. Nous appelons ces opérations des opérations élémentaires sur les colonnes de M.

Remarque 6.2.11 *(principe de simplification) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et i un entier, supposons construit :*

$$M_i \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad A_i M = M_i \quad .$$

Dans la pratique M_i sera plus "simple" que M et A_i sera un produit de matrices élémentaires. Appliquons à M_i une suite d'opérations élémentaires Σ sur ses lignes qui la transforme en une matrice M_{i+1}. Appliquons à A_i la même suite d'opérations élémentaires Σ sur ses lignes qui la transforme en A_{i+1}. Alors :

$$M_{i+1} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad A_{i+1} M = M_{i+1}$$

Preuve : Soit S produit de matrices élémentaires associé à la suite d'opérations élémentaires Σ, nous avons : $SM_i = M_{i+1}$, mais aussi $SA_i = A_{i+1}$. Il en résulte :

$$M_{i+1} = SM_i = S(A_i M) = (SA_i)M = A_{i+1}M \quad .$$

Nous noterons que si A_i est produit de matrices élémentaires, il en est de même de A_{i+1}. Dans la pratique, nous choisirons évidemment la suite d'opérations élémentaires Σ pour que M_{i+1} soit encore plus "simple" que M_i.

Définition 6.2.12 *Soit $L = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_n) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{K})$ une matrice ligne non nulle. Nous appelons ordre de L l'entier $v(L) = \inf\{i\ ;\ a_i \neq 0\}$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, notons L_i la i-ème ligne de M. Nous disons que M est ordonnée si :*

$$v(L_1) \leq v(L_2) \leq \cdots \leq v(L_k) \quad \text{et} \quad L_{k+1} = \cdots = L_n = 0 \quad .$$

Nous disons que M est échelonnée si :

$$v(L_1) < v(L_2) < \cdots < v(L_k) \quad \text{et} \quad L_{k+1} = \cdots = L_n = 0 \quad .$$

Algorithme d'échelonnage d'une matrice : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Cet algorithme fournira $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ produit de matrices élémentaires et une matrice $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ échelonnée telle que $BM = N$.

Départ : Le couple :

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad I_n \quad \text{avec} \quad I_n M = M \quad .$$

Étape 0 : Par une permutation des lignes (suite d'échange de deux lignes) de M, nous obtenons une matrice M_0 ordonnée. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice déduite de I_n par cette même permutation des lignes. Nous obtenons (voir remarque 6.2.11) :

$$M_0 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad A_0 M = M_0 \quad ,$$

où A_0 est produit de matrices élémentaires.

Étape i :

$$M_i \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad A_i M = M_i \quad ,$$

où M_i est ordonnée, où l'ordre des i premières lignes de M_i est strictement croissant et où A_i est produit de matrices élémentaires.

Passage à l'étape $l > i$: En enlevant pour $j > i$, aux j-ème lignes de M_i des multiples ad-hoc de sa i-ème ligne, nous obtenons une matrice M' dont les lignes sont d'ordres strcitement plus grand que i. En permutant éventuellement les lignes de M', nous obtenons une matrice M_l où $l > i$ tel que M_l soit ordonnée et que l'ordre des l premières lignes de M_l soit strictement croissant. Appliquons ces mêmes opérations sur les lignes de A_i, nous obtenons une matrice notée A_l. Nous avons ainsi construit un couple de matrices (M_l, A_l) tel que (voir remarque 6.2.11) :

$$M_l \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A_l \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad A_l M = M_l \quad ,$$

où M_l est ordonnée, où l'ordre des l premières lignes de M_l est strictement croissant et où A_l est produit de matrices élémentaires.

Proposition 6.2.13 *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. L'algorithme ci-dessus se termine en moins de n étapes sur un couple (N, A) tel que :*

$$N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{avec} \quad AM = N \quad ,$$

où N est une matrice échelonnée et A un produit de matrices élémentaires.

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A produit de matrices élémentaires et une matrice échelonnée N telle que $AM = N$.

Nous partons avec le couple de matrices :

$$(E_0) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 M = M \quad .$$

La permutation de la première ligne et de la troisième ligne de M est une matrice ordonnée. Permutons ainsi la première ligne et de la troisième ligne des deux matrices M et I_3, nous obtenons :

$$(E_1) \quad M_1 = S_{1,3}M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = S_{1,3}I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 M = M_1 \quad .$$

En ajoutant à la deuxième ligne de M_1 le produit par $-\frac{1}{4}$ de la première, nous faisons monter l'ordre de sa deuxième ligne. Ajoutons ainsi à la deuxième ligne des deux matrices M_1 et A_1 le produit par $-\frac{1}{4}$ de leurs premières lignes. Nous obtenons :

$$(E_2) \quad M_2 = T_{2,1}(-\frac{1}{4})M_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = T_{2,1}(-\frac{1}{4})A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 M = M_2 \quad .$$

En ajoutant à la troisième ligne de A_2 le produit par $-\dfrac{4}{3}$ de sa deuxième ligne, nous faisons monter l'ordre de la troisième ligne de M_2. Ajoutons ainsi à la troisième ligne des deux matrices M_2 et A_2 le produit par $-\dfrac{4}{3}$ de leurs deuxièmes. On obtient :

$$(E_3)\ M_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \ ,\ A_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } A_3M = M_3 \quad .$$

Ainsi, la matrice $A = A_3$ est produit de matrices élémentaires, $N = M_3$ est échelonnée et $AM = N$.Nous pouvons préciser la décomposition de A sous forme de produit de matrices élémentaires :

$$A = A_3 = T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3} \quad .$$

Algorithme d'inversion d'un matrice carrée : Nous nous proposons de donner un algorithme qui décidera si une matrice carrée est inversible et, si oui, donnera son inverse.

Lemme 6.2.14 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée inversible à droite et échelonée. Alors, M est triangulaire supérieure et les éléments sur sa diagonale sont non nuls.*

Preuve : Une matrice carrée échelonée est clairement triangulaire supérieure. Si un élément diagonnal est nul, sa dernière ligne d'ordre plus grand ou égal à n ne peut être d'ordre n. Elle serait donc nulle. C'est impossible suivant le lemme 6.2.10.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Appliquons la proposition 6.2.13 lorsque M est une matrice carrée. L'algorithme d'échelonnage nous donne un couple de matrices carrées (N, A) :

$$N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad ; \quad AM = N \quad ,$$

où N est une matrice échelonnée et A un produit de matrices élémentaires.

Cas 1 : Si N a une ligne constitué de zéro, suivant le lemme 6.2.14 : M n'est pas inversible à droite

Cas 2 : Sinon, N est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Soit $a_{i,i}$ l'élément diagonal de N placé à sa i-ème ligne. Pour tout indice i, multiplions la i-ème ligne de N et de B par $\dfrac{1}{a_{i,i}}$. Nous obtenons (voir remarque 6.2.11) un couple de matrices carrées (N_0, B_0) :

$$N_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{tel que} \quad B_0 M = N_0 \quad ,$$

où N_0 est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et B_0 un produit de matrices élémentaires.

Etape i : (N_i, B_i) un couple de matrices carrées (N_0, B_0) :

$$N_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{tel que} \quad B_i M = N_i \quad ,$$

tels que N_i est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, que les i dernières lignes de N_i coïncident avec les i dernières lignes de I_n et que $B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit produit de matrices élémentaires.

Passage à l'étape $i+1$: Considérons la suite d'opérations élémentaires consistant à ajouter à la $(n-i-1)$-ème ligne de N_i des combinaisons des i lignes suivantes de sorte que la $(n-i-1)$-ème ligne de N_i devienne la $(n-i-1)$-ème ligne de I_n. On obtient la matrice N_{i+1}. Appliquons cette même suite d'opérations aux lignes de B_i, on obtient la matrice B_{i+1}. Ainsi (voir remarque 6.2.11) :

$$N_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad B_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{tel que} \quad B_{i+1} M = N_{i+1} \quad ,$$

où N_{i+1} est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, où les $i+1$ dernières lignes de N_{i+1} coïncident avec les $i+1$ dernières lignes de I_n et où $B_{i+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ soit produit de matrices élémentaires.

Proposition 6.2.15 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'algorithme d'échelonnage 6.2.13 nous donne un couple de matrices carrées (N, A) :*

$$N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad , \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{tel que} \quad AM = N \quad .$$

Si N a une ligne constituée de zéro, M n'est pas inversible à droite (donc pas inversible). Sinon l'algorithme ci-dessus se termine en moins de n étapes sur le couple (I_n, B) tel que :

$$B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{tel que} \quad BM = I_n \quad ,$$

où B est un produit de matrices élémentaires. La matrice $M = B^{-1}$ est alors inversible et $M^{-1} = B$.

Exemple : Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer M^{-1} en suivant l'algorithme d'inversion. En déduire une écriture de M et M^{-1} et M comme produit de matrices élémentaires.

Cette exemple fait suite à celui illustrant la proposition 6.2.13. Nous y avions obtenu le couple de matrices (A, N) :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et } AM = N \quad .$$

où $A = T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3}$.

La matrice N est triangulaire avec des termes non nuls sur sa diagonale. Ainsi, nous pouvons déjà dire que M est inversible. Démarrons l'algorithme d'inversion à partir du couple (N, A).

La multiplication de la première ligne de N par $\frac{1}{4}$, de la deuxième par $\frac{4}{3}$ et le troisième par $\frac{3}{2}$ transforme la diagonale de N en une diagonale de 1. Effectuons ces opérations sur les matrices N et A. Nous obtenons le couple de matrices (N_0, B_0) :

$$(E_0') \quad N_0 = D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})N = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 2 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B_0 = D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4/3 & -1/3 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_0 M = N_0 \quad .$$

Etape 1 : Ajoutons à la deuxième ligne de N_0 le produit par $-\frac{4}{3}$ de sa troisième ligne, cette deuxième ligne devient $(0\,1\,0)$. Ajoutons donc aux deuxièmes lignes des deux matrices N_0 et B_0 le produit par $-\frac{4}{3}$ de leurs troisièmes lignes. On obtient le couple (N_1, B_1) :

$$(E_1') \quad N_1 = T_{2,3}(-\frac{4}{3})N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B_1 = T_{2,3}(-\frac{4}{3})B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_1 M = N_1 \quad .$$

Etape 2 : Ajoutons aux premières lignes des deux matrices N_1 et B_1 le produit par -2 de leurs troisièmes et le produit $-\frac{3}{4}$ de leurs deuxièmes. Nous obtenons le couple (N_2, B_2) :

$$(E_2') \quad N_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)A_1 = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad B_2 M = N_2 = I_3 \quad .$$

L'algorithme est terminé, car $N_2 = I_3$. Nous obtenons : $M = (A_2)^{-1}$ et

$$M^{-1} = B_2 = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous notons que :
$$M^{-1} = B_2 = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})\, A \quad .$$
Soit :
$$M^{-1} = T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3} \quad .$$
et
$$M = \left(T_{1,2}(-\frac{3}{4})T_{1,3}(-2)T_{2,3}(-\frac{4}{3})D_3(\frac{3}{2})D_2(\frac{4}{3})D_1(\frac{1}{4})T_{3,2}(-\frac{4}{3})T_{2,1}(-\frac{1}{4})S_{1,3}\right)^{-1} \quad .$$
Compte-tenu de la formule 2 de la proposition 2.3.3 et de la proposition **??** qui précise l'inverse d'une matrice élémentaire, on obtient :

$$M = S_{1,3}T_{2,1}(\frac{1}{4})T_{3,2}(\frac{4}{3})D_1(4)D_2(\frac{3}{4})D_3(\frac{2}{3})T_{2,3}(\frac{4}{3})T_{1,3}(2)T_{1,2}(\frac{3}{4}) \quad .$$
A noter que le déterminant de M est -2. Cela donne une preuve plus rapide de l'inversibilité de M. La formule donnée dans la proposition 2.4.7 permet également de retrouver rapidement l'inverse de M. On laisse au lecteur le soin de faire ce calcul.

Proposition 6.2.16 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *M est inversible à gauche : il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AM = I_n$*
2. *M est inversible à droite : il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$, .*
3. *M est produit de matrices élémentaires ,*
4. *M est inversible ,*

On a alors $A = B = M^{-1}$.

Preuve : Si M est inversible à droite, suivant la proposition 6.2.15, M est produit de matrices élémentaires. Si M est produit de matrices élémentaires, M est donc produit de matrice inversibes et M est inversible. Si M est inversible, M est en particulier inversible à gauche. Sa transposée est donc inversible à droite. Cette trasnposée est donc produit de matrices élémentaires. Il en résulte que M est le produit de matrices élémentaires. Or la transposée d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire. Donc, M est produit de matrices élémentaires, donc M est inversible et donc inversible à droite. Les quatre assertions sont alors équivalentes. En multipliant à droite AM par M^{-1}, nous obtenons $A = M^{-1}$. En multipliant à gauche MB par M^{-1}, nous obtenons $B = M^{-1}$.

La proposition nous apprend ainsi qu'une matrice inversible est produit de matrices élémentaires. Une telle décomposition n'est pas unique.

Proposition 6.2.17 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}$. *Le système d'équations linéaires associé à l'équation* $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *admet* $(0, \ldots, 0)$ *comme unique solution si et seulement si la matrice* A *est inversible.*

Preuve : Si A est inversible, suivant la propositin 2.5.1, comme $(0, \ldots, 0)$ est solution du systémé linéaire de matrice A, $(0, \ldots, 0)$ en est l'unique solution. Inversement si A n'est pas inversible suivant l'algorithme d'inversion d'une matrice carrée, il existe une matrice C produit de matrices élémentaires tel que CA ait une ligne nulle. Nous en déduisons que le systéme d'équations linéaires homogènes de matrice CA a un moins une variable libre et a donc une infinité de solutions. Comme C est inversible, il en est de même du systéme équivalent d'équations linéaires homogènes de matrice A.

Il s'agit d'une deuxième démonstration de ce résultat. La première s'appuyait sur la théorie des espaces vectoriels (voir proposition 5.4.11).