Algèbre
Cours Fondements S1 et S2
Exercices Corrigés
Février 2018

March 8, 2018

Contents

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Enoncés

Exercice 1 – $K = \mathbf{R}$. Nous considèrons l'équation linéaire : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
1) Qu'est ce qu'une solution de cette équation ?
2) Donner l'ordre des variables ? Ce système est-il triangulé ? Quelles en sont les variables libres ?
3) Donner les solutions de cette équation.

Exercice 2 – $K = \mathbf{R}$. Nous considèrons l'équation linéaire : $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$.
1) Qu'est ce qu'une solution de cette équation ?
2) Donner l'ordre des variables ? Ce système est-il triangulé ? Quelles en sont les variables libres ?
3) Donner les solutions de cette équation comme somme d'une solution particulière et des combinaisons linéaires de 3 éléments de $\mathbf{R}^4$.
4) Ecrire l'équation homogéne associée. Quelles sont les solutions de cette équation ?

Exercice 3 – $K = \mathbf{R}$. Nous considèron le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

1) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E.
2) Quelles sont les variables libres de E' ? Résoudre alors E'.

Exercice 4 – $K = \mathbf{R}$. Nous considèrons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire E ? Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?
2) Donner un système triangulé E'' ayant les mêmes solutions que E. Préciser les variables libres de E'' ?
3) Résoudre le système linéaire E.

Exercice 5 – Nous considèrons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & & (E_2) \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 11x_4 & = & -6 & & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Donner en utilisant avec précision l'algorithme de triangulation du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres du système triangulé obtenu ?
2) Déterminer les solutions dans $\mathbf{R}^4$ de E à l'aide de ces variables libres. Vous exprimerez ces solutions sous forme de la somme d'un élément de $\mathbf{R}^4$ et de l'ensemble des combinaisons de deux éléments de $\mathbf{R}^4$ que l'on précisera.
3) Quelles sont alors les solutions du système sans second membre associé à E ?

Exercice 6 – Nous considèrons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_1) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 & & (E_2) \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 & & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables de ce système ? Donner en utilisant avec précision l'algorithme de triangulation du cours un système triangulé ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres du système triangulé obtenu ?
2) Déterminer les solutions dans $\mathbf{R}^4$ de E à l'aide de ces variables libres. On exprimera ces solutions sous forme de la somme d'un élément de $\mathbf{R}^4$ et de l'ensemble des combinaisons d'éléments de $\mathbf{R}^4$ que l'on précisera.
3) Mêmes questions avec le système d'équations linéaires :

$$(H) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (S_1) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 & & (S_2) \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 & & (S_3) \end{array}\right. .$$

Exercice 7 – $K = \mathbf{R}$. Nous considèrons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 0 & & (E_2) \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 & & (E_3) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système E ? Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?
2) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?
3) Résoudre le système d'équations linéaires E.

Exercice 8 – Nous considérons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & -x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

1) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E. Quelles sont les variables libres de ce système triangulé ?
2) Résoudre ce système en exprimant ses solutions à l'aide des variables libres du système triangulé ?

Exercice 9 – Nous considérons le système d'équations linéaires :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccc} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 & (E_1) \\ -2x_3 & + & 2x_2 & + & x_1 & = & 0 & (E_2) \\ x_3 & + & x_2 & + & 2x_1 & = & 2 & (E_3) \end{array} \right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables du système linéaire E ?
2) Quel est l'ordre des équations E_1, E_2, E_3 ?
3) Donner un système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E.
4) Quelles sont les variables libres de E' ? Quelles sont les solutions de E' ? Quels sont les triplets de réels (x_1, x_2, x_3) de réels solutions de E ?

Exercice 10 –

Nous considérons le système de 3 équations à 4 inconnues :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 & (E_2) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & (E_3) \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 5 & (E_4). \end{array} \right.$$

1) Quel est l'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 de ce système. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?
2) Résoudre le système E. Vérifier les calculs.

Exercice 11 – Nous considèrons le système de 4 équations à 4 inconnues à coefficients rationnels :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 & (E_2) \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 2 & (E_3) \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_4) \end{array}\right. .$$

1) Quel est l'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 de ce système. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?
2) Trouver les quadruplets de nombres rationnels solutions du système (E).
3) Vérifier les calculs en testant une solution particulière.
4) Résoudre le système :

$$(E_h) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 & (E_1') \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E_2') \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 0 & (E_3') \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 & (E_4') \end{array}\right. .$$

1.2 Corrections

Correction de l'exercice 1 :

1) Une solution de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est un quadruplet de réels (s_1, s_2, s_3, s_4) tels que $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$.
La variable x_1 est la première variable, la variable x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième. L'équation commence par x_1. elle est d'ordre 1. Comme le système est constistué d'une seulle équation d'odre 1, l'ordre des équations du système est strictement croissant. Le systéme est triangulé. La variable x_1 est la seule

variable de tête. Les variables x_2, x_3, x_4 sont les variables libres.

2) Le quadruplet de réels (x_1, x_2, x_3, x_4) est une solution de notre équation si et seulement si :

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \quad .$$

Ainsi , l'ensemble S des solutions est :

$$\begin{aligned} S &= \{(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad , \\ &= \{+x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de notre équation sont l toutes les combinaisons linéaires des trois éléments de $\mathbf{R}^4$: $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$.

Correction de l'exercice 2 :

1) Une solution de l'équation $2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5$ est un quadruplet de réels (s_1, s_2, s_3, s_4) tels que $2s_1 + s_2 - s_3 - 4s_4 = 5$.
La variable x_1 est la première variable, la variable x_2 la deuxième, x_3 la trosième et x_4 la quatrième. L'équation commence par x_1. elle est d'ordre 1. Comme le système est constistué d'une seulle équation d'odre 1, l'ordre des équations du système est strictement croissant. Le systéme est triangulé. La variable x_1 est la seule variable de tête. Les variables x_2, x_3, x_4 sont les variables libres.

2) Le quadruplet de réels (x_1, x_2, x_3, x_4) est une solution de notre équation si et seulement si :

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{5}{2} \quad .$$

Ainsi , l'ensemble S des solutions est :

$$\begin{aligned} S &= \{(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{5}{2}, x_2, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad , \\ &= \{(\frac{5}{2}, 0, 0, 0) + x_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + x_3(\frac{1}{2}, 0, 1, 0) + x_4(2, 0, 0, 1)) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de notre équation sont les sommes du quadruplet de réels $(\frac{5}{2}, 0, 0, 0)$ avec toutes les combinaisons linéaires des trois éléments de $\mathbf{R}^4$: $(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$ et $(2, 0, 0, 1)$.

3) L'équation homogéne associée est

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \quad .$$

Ses solutions sont :

$$\{x_2(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0) + x_3(\frac{1}{2}, 0, 1, 0) + x_4(2, 0, 0, 1)) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Correction de l'exercice 3 :

1) Notons E le système :

$$(E) \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 & & (E_2) \end{array} \right. \quad .$$

Les variables de ce système sont x_1, x_2, x_3, x_4 ordonnées naturellement (x_1 est la première variable, ...). Les équations E_1 et E_2 du système E sont d'ordre 1. Notre système est donc ordonné. Le système suivant a les mêmes solutions que (E) :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & & (E_2 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

L'équation E_1 est d'ordre 1 de variable de tête x_1, l'équation $E_2 - E_1$ est d'ordre 2 de variable de tête x_2. Ainsi, le système E' est triangulé. Ses variables libres sont x_3 et x_4.

2) Pour résoudre E', donc E, il suffit de remonter les équations de E'. La dernière équation de E' donne l'expression de x_2 à l'aide des variables libres x_3 et x_4 :

$$x_2 = x_3 + x_4 - 1$$

Remplaçons x_2 par sa valeur dans les équations précédentes, on obtient :

$$x_1 + x_3 + x_4 - 1 - x_3 - x_4 = 1 \quad ,$$

soit :

$$x_1 - 1 = 1 \quad .$$

Nous obtenons donc l'expression de x_1 à l'aide des variables libres x_3 et x_4 : $x_1 = 2$. Ainsi, l'ensemble S des solutions est :

$$S = \{(2, x_3 + x_4 - 1, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(2, -1, 0, 0) + x_3(0, 1, 1, 0) + x_4(0, 1, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Pour vérifier, nous constatons bien que $(2, -1, 0, 0)$ est une solution de E et que $(0, 1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0, 1)$ sont solutions du système sans second membre associé à E :

$$(E_0) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Correction de l'exercice 4 :

1) Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième. Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné.
2) Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (E'_2 = E_2 - E_1) \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & (E'_3 = E_3 - 2E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Les équations E_1, E_2', E_3' sont respectivement d'ordre $1,2,2$. Ce sytème est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \quad (E_1) \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \quad (E_2') \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \quad (E_3'' = E_3' + E_2') \end{array} \right. \quad .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1,2,3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes. Les variables de tête du système triangulé précédent E'' sont x_1 pour la première équation, x_2 pour la deuxième équation et x_3 pour la troisième équation. Ainsi, x_4 est la seule variable libre de ce système triangulé.

3) Résolvons le système triangulé E'' qui a mêmes solutions que notre système E. La derniére ´quation de E'' donne :

$$2x_3 = -1 - 2x_4 \quad , \quad x_3 = -\frac{1}{2} - x_4 \ .$$

Il vient alors :

$$x_2 = x_3 + x_4 - 1 = -\frac{3}{2} \ .$$

Puis :

$$x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2 \ .$$

Les solutions de E sont donc l'ensemble :

$$\{(2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} - x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

ou encore :

$$\{(2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0) + x_4(0,0,-1,1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

Correction de l'exercice 5 :

1) L'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 est l'ordre naturel. Les trois équations de E sont d'ordre 1. Le système est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & - & 9x_2 & & & - & 15x_4 & = & -18 & & (E_3' = E_3 - 4E_1) \end{array} \right. .$$

Les équations E_1, E_2', E_3' sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant a les mêmes solutions que E :

$$\left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & & (E_3' - 3E_2') \end{array} \right. .$$

"Nettoyons" le système obtenu en enlevant l'équation $0 = 0$. On obtient un système ayant les mêmes solutions que E :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & & & - & 5x_4 & = & -6 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array} \right. .$$

Les équations de ce système sont d'ordre respectivement $1, 2$. Ce système est triangulé. Le premièr algorithme est terminé.

2) Résoudre E revient donc à résoudre le système triangulé E''. La variable de tête de (E_1) est x_1, la variable de tête de (E_2') est x_2, les variables libres de E'' sont donc x_3 et x_4. Résolvons ce système triangulé

en suivant la méthode du cours. La dernière équation donne :

$$x_2 = 2 - \frac{5}{3}x_4 \quad .$$

Remplaçons cette valeur de x_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \quad .$$

Nous obtenons :

$$x_1 = 1 - x_3 + \frac{2}{3}x_4 \quad .$$

Nous avons ainsi exprimé x_1 et x_2 à l'aide des variables libres. Ainsi, l'ensemble S des solutions de E est :

$$S = \{(1 - x_3 + \frac{2}{3}x_4, 2 - \frac{5}{3}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit : $S = \{(1,2,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$

Nous avons, comme demandé, exprimé l'ensemble des solutions de E sous la forme de la somme d'une solution particulière $(1,2,0,0)$ et des combinaisons des vecteurs $(-1,0,1,0)$ et $(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1)$ de $\mathbf{R}^4$.

3) Nous savons que l'ensemble :

$$\tilde{S} = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$$

est l'ensemble des solutions du système sans second membre :

$$(\tilde{E}) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & - & 11x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

On peut vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les calculs en constatant que $(1,2,0,0)$ est solution des 3 équations de E et que $(-1,0,1,0)$ et $(\frac{2}{3},-\frac{5}{3},0,1)$ sont solutions des trois équations de $\tilde{E}$.

Correction de l'exercice 6 :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & & (E_3' = E_3 - E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_1) \\ & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & + & 0 & = & 0 & & (E_3' - E_2') \end{array}\right. \quad .$$

Nous pouvons supprimer la dernière équation $0=0$. Nous obtenons donc le système triangulé E'' qui a même solution que le système de départ :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_1) \\ & & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & & (E_2') \end{array}\right. \quad .$$

Les variables de tête des équations de ce système triangulé sont x_1 et x_3. Les variables libres sont donc x_2 et x_4.

2) Pour résoudre un système triangulé, on part de la dernière équation et on remonte. La dernière équation donne :

$$x_3 = -1 + 2x_4 \quad .$$

La première équation donne alors :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 2 = x_2 + 1 - 2x_4 + x_4 + 2 = x_2 - x_4 + 3 \ .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(x_2 - x_4 + 3, x_2, -1 + 2x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(3, 0, -1, 0) + x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(-1, 0, 2, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

Vérification Le lecteur vérifiera que $(-1, 0, 2, 1)$ est bien solution de

$$(E) \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \qquad (E_1) \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 3 \qquad (E_2) \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \qquad (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

et que $(1, 1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 2, 1)$ sont solutions du système dit homogène associé à E :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

3) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le systéme H est ordonnée car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système H pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons la première équation du système H pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (S_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (S_2 - 2S_1) \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (S_3 - S_1) \end{array}\right. .$$

Ordonons, on obtient :

$$(H') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 & (S_1) \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (S_3 - S_1) \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 & (S_2 - 2S_1) \end{array}\right. .$$

Comme ce système est triangulé l'algorithme est terminé en une étape. Il admet pour seule variable libre : x_4. Résolvons H donc H'. Partons de la dernière équation et remontons :

$$x_3 = -1 + 2x_4 \quad .$$

La deuxième équation donne alors :

$$2x_2 = x_3 - 2x_4 + 1 = -1 + 2x_4 - 2x_4 + 1 = 0 \; .$$

On obtient $x_2 = 0$. La première équation donne alors :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 2 = 1 - 2x_4 + x_4 + 2 = 3 - x_4$$

Soit Σ l'ensemble des solutions de S, on obtient :

$$\Sigma = \{(3 - x_4, 0, -1 + 2x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$\Sigma = \{(3, 0, -1, 0) + x_4(-1, 0, 2, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification : Le lecteur vérifiera que $(-1,0,2,1)$ est bien solution de H et que $(1,1,0,0)$ et $(-1,0,2,1)$ sont solutions du système dit homogène associé à H :

$$\left[\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad .$$

Correction de l'exercice 7 :

1) Le système $*$ a quatre variables. L'ordre des variables du système $*$ est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1.

2) Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que E :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -2 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 5x_4 & = & 1 & (E_3' = E_3 - 3E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Les équations E_1, E_2', E_3' sont respectivement d'ordre $1,2,2$. Ce sytème est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E' :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & = & -2 & (E_2') \\ & & & & 8x_3 & - & 8x_4 & = & 0 & (E_3'' = E_3' + (1/2)E_2') \end{array}\right. \quad .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2, 3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes.

Étape 3 Résolvons le système triangulé E' qui a mêmes solutions que notre système E. La derniére ´quation de E' donne $x_3 = x_4$. Nous obtenons alors : $x_2 = -1$, puis $x_1 = 2$. Ainsi, les solutions de notre systèue sont :

$$\{(2, -1, x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

ou encore :

$$\{(2, -1, 0, 0) + x_4(0, 0, 1, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

Correction de l'exercice 8 :

Le système E a quatre variables. L'ordre des variables du système E est l'ordre naturel : x_1 est la première variable, x_2 la deuxième, x_3 la troisième et x_4 la quatrième.
Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_1 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1. Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons E_1 pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant a les mêmes solutions que E' :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -1 & (E'_2 = E_2 - E_1) \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 0x_4 & = & 1 & (E'_3 = E_3 - E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Les équations E_1, E'_2, E''_3 sont respectivement d'ordre $1, 2, 2$. Ce système est ordonné.

Étape 2 : Utilisons la deuxième équation pour faire monter l'ordre de la troisième. Le système suivant à mêmes solutions que E' :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -1 & (E'_2) \\ & & & - & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 2 & (E''_3 = E'_3 - E'_2) \end{array}\right. \quad .$$

Les équations de ce dernier système sont d'ordre respectivement $1, 2, 3$. Ce système est triangulé. L'algorithme de triangulation aboutit ici en deux étapes.
Les variables de têtes de ce dernier système triangulé sont x_1, x_2 et x_3. Ce système triangulé admet donc x_4 comme seule variable libre.

2) Résolvons le système triangulé. La dernière 'équation donne :

$$x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4$$

Il vient :

$$x_2 = -1 - 4x_3 + 5x_4 = -1 + \frac{4}{3} - \frac{10}{3}x_4 + 5x_4 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4$$

Il vient enfin :

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4 - x_4 = \frac{1}{3} - \frac{11}{6}x_4 \quad .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E'', on obtient :

$$S = \{(\frac{1}{3} - \frac{11}{6}x_4, \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4, -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + x_4(-\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification : on constate bien que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$ est solution du système E'' et que $(-\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}, 1)$ est solution du système "homogène associé :

$$(E_{hom}) \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Correction de l'exercice 9 :

1) Le système E a trois variables. La variable x_3, écrite le plus à gauche, est la première variable, puis x_2 qui est donc la deuxième variable et enfin x_1 la troisième.

2) Les coefficients dans E_1, E_2 et E_3 de x_3 sont non nuls. Les trois équations E_1, E_2 et E_3 sont donc d'ordre 1.

3) Le système E est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.

Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que le système :

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 & & (E_1) \\ & & & & -x_1 & = & -2 & & (E_2 - 2E_1) \\ & & 2x_2 & + & 3x_1 & = & 3 & & (E_3 + E_1) \end{array}\right. \quad .$$

Les équations $E_1, E_2 - 2E_1, E_3 + E_1$ sont respectivement d'ordre $1, 3, 2$. Ce système n'est pas ordonné. Permutons les deux dernières équations, on obtient le système triangulé E' ayant les mêmes solutions que E:

$$(E') \quad \left[\begin{array}{ccccccccc} -x_3 & + & x_2 & + & x_1 & = & 1 & & (E_1) \\ & & 2x_2 & + & 3x_1 & = & 3 & & (E_3 + E_1) \\ & & & & -x_1 & = & -2 & & (E_2 - 2E_1) \end{array}\right. \quad .$$

L'algorithme de triangulation est donc terminé en une étape.

4) Le systéme triangule E' n'a pas de variable libre. En effet les trois variables de ce systéme sont respectivement les variables de tête des équations de E'. En remontant les équations de E', on obtient que le système E a pour unique solution :

$$(s_3, s_2, s_1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2) \quad .$$

Donc, il y a un seul triplet (x_1, x_2, x_3) de réels solution de E, le triplet :

$$(2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \quad .$$

Correction de l'exercice 10 :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_2 - E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 & & (E_3 - 2E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & & (E_4 - 3E_1) \end{array}\right. .$$

Ordonnons ce système :

$$(E') \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & & (E_4 - 3E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 & & (E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_2 - E_1) \end{array}\right. .$$

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E'') \left[\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & & (E_4 - 3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 & & (E_3 - 2E_1 - (E_4 - 3E_1)) \\ & & & & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 & & (E_2 - E_1) \end{array}\right. .$$

Ce système est ordonné.

Étape 3 Elle consiste à utiliser la troisième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons la troisième équation du système E'' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & (E_4 - 3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 & (E_3 - 2E_1 - (E_4 - 3E_1)) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & . \end{array}\right.$$

Supprimons l'équation $0 = 0$, on obtient le système triangulé :

$$(E''') \quad \left[\begin{array}{ccccccccll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & & & = & 2 & (E_4 - 3E_1) \\ & & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 & (E_3 - 2E_1 - (E_4 - 3E_1)) \quad . \end{array}\right.$$

L'algorithme est terminé.

Les variables de tête des 3 équations de E''' sont respectivement x_1, x_2 et x_3. Ce système $(*E''')$ admet donc x_4 comme seule variable libre.

2) En remontant les équations de ce système triangulé, nous obtenons :

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}x_4 \quad , \quad x_2 = \frac{4}{3} + x_4 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_4 \; .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x_4, \frac{4}{3} + x_4, 1 + \frac{1}{2}x_4, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0) + x_4(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1) \quad \text{tels que} \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Vérification Le lecteur vérifiera que $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$ est bien solution de E et que $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1)$ est solution du système dit homogène associé à (E) :

$$\left[\begin{array}{llllllll} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = 0 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = 0 \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 11 :

1) La première variable est x_1, la deuxième x_2, la troisième x_3 et la quatrième x_4. le système E est ordonné car les trois équations du système sont d'ordre 1.

Étape 1 Elle consiste à utiliser la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons donc la première équation du système E pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$(E') \quad \left[\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \qquad (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \qquad (E'_3 = E_3 - 3E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \qquad (E'_4 = E_4 - E_1) \end{array}\right.$$

Ce système est ordonné.

Étape 2 Elle consiste à utiliser la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes; puis, si besoin est : nous simplifions , stoppons ou on ordonons. Utilisons la deuxième équation du système E' pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$\left[\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \qquad (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \qquad (E'_2 = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & + & 0 & = & 0 \qquad (E'_3 - E'_2) \\ & & & & & + & 0 & = & 0 \qquad (E'_4 - E'_2) \end{array}\right.$$

On peut supprimer les deux dernières équations $0 = 0$. On obtient donc le système triangulé E'' qui a même solution que le système de départ :

$$(E'') \quad \left[\begin{array}{cccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 & (E_1) \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 & (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array} \right.$$

Les variables de tête des équations de ce système triangulé sont x_1 et x_2. Les variables libres sont donc x_3 et x_4.

2) Nous cherchons des solutions rationnelles de ce système à coefficients rationnels. Nous travaillons donc sur $K = \mathbf{Q}$ le corps des nombres rationnels. Pour résoudre un système triangulé, on part de la dernière équation et on remonte. La dernière équation donne :

$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \quad .$$

La première équation donne alors :

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - 2x_4 + 1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4 \quad .$$

Soit S l'ensemble des solutions de E, on obtient :

$$S = \{(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{8}{5}x_4, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad ,$$

$$S = \{(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0) + x_3(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0) + x_4(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

Remarque : Nous cherchons comme quadruplets de solutions des quadruplets de rationnels. Les coefficients du système sont bien rationnels et on considère le système comme un système à coefficients rationnels. Il reste à appliquer le cours pour trouver les solutions.

3) On vérifie que $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)$ est solution des quatre équations de (E).

4) Le système (E_h) est le système homogène associé à (E). D'après le cours, ses solutions sont donc

$$\{(x_3(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, 0) + x_4(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_2, x_4 \in \mathbf{Q}\} \quad .$$

Le lecteur pourra vérifier en reprenant les calculs analogues à ceux des questions 1 et 2.

2 Matrices

2.1 Enoncés

Exercice 12 – Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, CD, DC, AE, CE.

Exercice 13 – (extrait partiel novembre 2011)
On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Calculer, s'ils ont un sens, les produits AB, BA, AC, CA, B^2.

Exercice 14 – On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer s'ils ont un sens les produits $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$.
2) En déduire, sans plus de calcul, que A et C sont inversibles et préciser leurs inverses.

Exercice 15 – Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, A^2 , B^2 et $A + 2\,\mathrm{Id}_2$.

Exercice 16 – Soit A, B, C les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{R}) \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R})$$

Déterminer les produits définis 2 à 2 de ces trois matrices.

Exercice 17 – Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M)$ et retrouver la valeur de M^{-1} en utilisant la formule d'inversion donnée dans le cours.

Exercice 18 – (extrait partiel novembre 2009)

1) Déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Déduire de la question 1 une matrice X de $M_{3,3}(\mathbf{R})$telle que :

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice 19 – 1) Déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Vérifier le calcul en effectuant les calculs des matrices MM^{-1} et $M^{-1}M$.
3) En déduire les triplets de réels (x_1, x_2, x_3) tels que :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice 20 – Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1) Calculer le déterminant de M, sa comatrice et l'inverse de M.
2) Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé :

$$*(m) \quad \left[\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & x_3 & = & m \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & + & x_2 & + & x_3 & = & 2m \end{array} \right. \quad .$$

2.2 Corrections

Correction de l'exercice 12 :
Le lecteur vérifiera que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \quad .$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad DC = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad AE = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Le produit CE n'a pas de sens car la taille des colonnes (à savoir 2) de E est différent de la taille des lignes (à savoir 3) de C.

Correction de l'exercice 13 :
On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Les deux autres produits B^2 et BA n'ont pas de sens.

Correction de l'exercice 14 :
1)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

BA n'a pas de sens car la taille des lignes de B n'est pas égale à celle des colonnes de A.

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\mathrm{Id}_2 \quad .$$

$$CB = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

BC n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de C.
B^2 n'a pas de sens car la taille des lignes de de B n'est pas égale à celle des colonnes de B.

2) Nous avons : $AC = CA = -2\mathrm{Id}_2$, nous en déduisons :

$$A(-\frac{1}{2}C) = (-\frac{1}{2}C)A = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice A est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

De même :

$$(-\frac{1}{2}A)C = C(-\frac{1}{2}A) = \mathrm{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice C est inversible, d'inverse :

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 15 :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice BA n'a pas de sens.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice B^2 n'a pas de sens.

$$A + 2\,\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 16 :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \ , \ BA = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 10 & 2 & -4 \\ -10 & -8 & 6 \end{pmatrix} \ , \ CA = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix} \ ,$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} \ , \ C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \ .$$

Les matrices AC , CB, A^2 et B^2 ne sont pas définis.

Correction de l'exercice 56 :

Un calcul donne $\det M = 2(5-2) - 2(4-2) + (4-5) = 6 - 4 - 1 = 1$.
Ainsi, par la formule donnée à la fin de la sous-section **??** :

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5-2 & -(4-2) & 4-5 \\ -(2-1) & 2-1 & -(2-2)) \\ 4-5 & -(4-4) & 10-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 57 :
1)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \ .$$

2) Multiplions l'équation par M^{-1} à droite. Notre équation équivaut à :

$$X \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad .$$

Cette équation a comme unique solution :

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -(1/4) \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & -(5/4) \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 58 :

1) Nous obtenons

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

2) Nous vérifions par des calculs de produits ligne-colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) L'équation matriciele équivaut à :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2I_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ,$$

soit :

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = M \quad .$$

Noter équation matricielle est donc équivalente à

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Il vient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, notre équation admet pour unique solution le triplet de réels : $(-2, 3, -1)$.

Correction de l'exercice 20 :

1)

$$\begin{aligned} \det M &= 1 \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2)\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned} \quad .$$

Le déterminant de M est non nul, la matrice carrée M est donc inversible. La comatrice de M est donnée par la formule :

$$\mathrm{Com}\,(M) = \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad .$$

Soit :

$$\text{Com } M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

On a alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\,{}^t(\mathrm{Com} M) = {}^t(\mathrm{Com} M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Le système linéaire équivaut à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ -2m+1 \\ 4m-1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système $*(m)$ admet l'unique solution : $(5m-1, -2m+1, 4m-1)$.

3 Espaces vectoriels

3.1 Enoncés

Exercice 21 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

1) En résolvant ce système suivant l'algorithme du cours, donner une base de F. Quelle est la dimension de F ?
2) Soit $u = (-4, -1, 3, 3)$ et $v = (-3, -3, 6, 3)$. Montrer que u et v appartiennent à F. Quelles sont les coordonnées de u et v dans la base déterminée à la question 1. En déduire que (u, v) est une base de F.

Exercice 22 – Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
1) Montrer en utilisant la définition que $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ est une base de E. Pourquoi aurait-il été suffisant de montrer que la famille $(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3)$ était libre ou génératrice ?
2) Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$? Calculer P^{-1}.
En déduire les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 23 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array}\right. .$$

Déterminer une base de F.

Exercice 24 – Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de base (e_1, e_2). On pose $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$.
1) Montrer par deux méthodes que la famille (u_1, u_2) est une base.

2) Exprimer par deux métodes e_1, puis e_2 comme une combinaison linéaire de u_1, u_2.
3) Si un vecteur u de E a pour coordonnées (A, B) dans la base (u_1, u_2), quelles sont les coordonnées (a, b) de u dans la base (e_1, e_2) et inversement ?

Exercice 25 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array} \right. .$$

et le sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(**) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. .$$

Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 26 – Nous considérons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 & (E_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_2) \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. .$$

On note P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E).

1) Préciser en utilisant l'algorithme de résolution une base $\mathcal{B}$ de P.
2) Vérifier que les vecteurs $u = (1, -1, 1, -1)$ et $v = (0, 3, 0, 4)$ appartiennent à P.
3) Déterminer les coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$ déterminée dans 1).
4) Montrer que (u, v) est une base de P.

Nous considérons le système d'équations linéaires à coefficients réels :

$$(E') \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad .$$

Nous notons F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué des solutions de (E').
5) Montrer que $P \bigcap F = \{0\}$.
6) Déterminer une base de F.
7) Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, montrer qu'il existe $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in P$ et $x'' = (x''_1, x''_2, x''_3, x''_4) \in F$ tel que $x = x' + x''$. On déterminera x' et x''.

3.2 Corrections

Correction de l'exercice 21 :
1) F est constitué des solutions d'un système homogène à coefficients réels de deux équations à quatre inconnues. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$. F est encore formé des solutions du système homogène :

$$(*) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_1) \\ \quad 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 & (E_2 - E_1) \end{cases} \quad .$$

qui est un système triangulé de variables libres x_3 et x_4. Nous obtenons :

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \quad .$$

On obtient alors :

$$x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \quad .$$

Il en résulte :

$$F = \{(\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

$$F = \{x_3(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Ainsi, F est l'ensemble des combinaisons lin?eaires des vecteurs

$$e_1 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = (-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) \ .$$

La famille (e_1, e_2) est donc une famille génératrice de F. C'est une famille libre. En effet :

$$x_3(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + x_4(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) = (\frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4, -\frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, x_3, x_4) = 0$$

implique clairement $x_3 = x_4 = 0$. C'est donc une base de F. Cette base est formée de deux éléments. Donc, $\dim_{\mathbf{R}} F = 2$.

Cela correspond au résultat du cours : l'algorithme de résolution d'un système d'équations linéaires homogènes à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ de p équations à n inconnues fournit une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ constitué par ses solutions.

2) Pour montrer que u et v sont dans F, nous vérifions qu'ils satisfont aux équations $*$. Pour u, cela donne par exemple :

$$-4 - (-1) - 3 + 2 \times 3 = -4 + 2(-1) + 3 + 3 = 0 \quad .$$

Ainsi, il existe $x, y \in \mathbf{R}$ tels que :

$$(-4, -1, 3, 3) = x(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0) + y(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1) = (\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}t, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y, x, y) \quad .$$

Nous en déduisons $x = 3$ et $y = 3$. Les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2) sont donc $(3, 3)$. De méme, nous montrons que les coordonnées de v dans la base (e_1, e_2) sont dontc $(6, 3)$.

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au + bv = 0$. Il en résulte que les coordonnées de $au + bv$ dans la base (e_1, e_2) sont nulles. Nous obtenons en écrivant ces coordonnées en colonne :

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3b \\ 6a + 3b \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Le couple (a,b) vérifie donc le système d'équations linéares homogènes :

$$\left[\begin{array}{rcl} 3a+3b & = & 0 \\ 6a+3b & = & 0 \end{array}\right. .$$

en résolvant ce système, nous obtenons $a=b=0$. Ainsi, (u,v) est une famille libre. Or, la dimension de F est 2, donc (u,v) est une base de F.

Pour montrer que (u,v) est une base de F, nous pouvons aussi considérer la matrice :

$$M_{(e_1,e_2)}(u,v) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u et v dans la base (e_1,e_2) de F. Le déterminant de cette matrice est non nul. Donc, (u,v) est une base de F.

Correction de l'exercice 22 :

1) Montrons que la famille $(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est une famille libre de E. Soit a,b,c trois réels tels que :

$$a(e_1+e_2+e_3)+b(e_2+e_3)+ce_3 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$ae_1+(a+b)e_2+(a+b+c)e_3 = 0 \quad .$$

Comme $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E, c'est une famille libre. On en déduit :

$$a = a+b = a+b+c = 0$$

Il en résulte : $a=b=c=0$. Nous avons ainsi prouvé que la famille $\mathcal{B}'=(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est libre.

Montrons que la famille $\mathcal{B}'=(e_1+e_2+e_3, e_2+e_3, e_3)$ est génératrice. Soit u un vecteur de E. Comme $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de E, si (x_1,x_2,x_3) sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$:

$$u = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \quad .$$

Cherchons (X_1, X_2, X_3) trois réels, tels que :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = X_1(e_1 + e_2 + e_3) + X_2(e_2 + e_3) + X_3e_3 \quad .$$

Il vient :

$$x_1e_1 + x - 2e_2 + x_3e_3 = X_1e_1 + (X_1 + X_2)e_2 + (X_1 + X_2 + X_3)e_3 \quad .$$

Il en résulte puisque $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E (unicité de l'expression d'un vecteur dans une base) ;

$$(*) \left\{ \begin{array}{lcl} X_1 & = & x_1 \\ X_1 + X_2 & = & x_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 & = & x_3 \quad . \end{array} \right.$$

Ainsi, (X_1, X_2, X_3) sont les solutions d'un système linéaire. Résolvons ce système. Il se trouve qu'il est triangulé. On obtient :

$$(*) \quad X_1 = x_1 \quad , \quad X_2 = x_2 - X_1 = x_2 - x_1 \quad , \quad X_3 = x_3 - (X_1 + X_2) = x_3 - x_2 \quad .$$

On a donc :

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(e_1 + e_2 + e_3) + (x_2 - x_1)(e_2 + e_3) + (x_3 - x_2)e_3 \quad .$$

Le vecteur u est donc bien combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. La famille $\mathcal{B}'$ est donc libre, génératrice de E. C'est donc une base de E.

Nous noterons que l'on obtient par la formule $*$ les coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur dont on connait les coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

En fait, comme la dimension de E est trois, Nous aurions pu faire plus court pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base en rappelant que dans un espace vectoriel de dimension 3 une famille libre de 3 vecteurs de E est une base de E. Mais, à ce moment là, nous perdons la formule de changement de coordonnées.

2)

$$P = M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque P est une matrice de passage, elle est inversible. Le calcul de sont déterminant et de sa comatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées (X_1, X_2, X_3) dans la base $\mathcal{B}'$ d'un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la formule :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Nous retrouvons, l'expression donnée dans la première question.

Nous savons que $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(e_1, e_2, e_3)$ n'est autre que la matrice de changement de base de la $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, si nous posons $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, et $e'_3 = e_3$:

$$\left[\begin{array}{lcl} e_1 & = & e'_1 - e'_2 \\ e_2 & = & e'_2 - e'_3 \\ e_3 & = & e'_3 \quad . \end{array} \right.$$

Correction de l'exercice 23 :

Pour la rédaction, voir la solution de la question 1 de l'exercice 21. Après calcul, le lecteur constatera que les systémes d'équations linéaires homogènes des exercices 21 et 23 sont égaux.

Correction de l'exercice 24 :
1) Méthode 1 : Soit a et b deux réels tels que : $au_1 + bu_2 = 0$. Nous en déduisons :

$$a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons :

$$(a + b)e_1 + (a - b)e_2 = 0 \quad .$$

Comme (e_1, e_2) est une base de E, c'est une famille libre. La dernière égalité implique donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ a - b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Résolvons ce système. On obtient : $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre. Comme E est de dimension 2, (u_1, u_2) est une base de E.
1) Méthode 2 : La matrice dont les colonnes sont les cordonnées de u_1, u_2 dans la abse $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est -2. Elle est donc inversible et (u_1, u_2) est donc une base de E.

2) Méthode 1 : Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 + e_2 & = & u_1 \\ e_1 - e_2 & = & u_2 \end{array} \right. \quad .$$

Résolvons ce "système linéaire" d'équations entre vecteurs. En conservant la première équation et enlevant la première équation à la seconde, nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 + e_2 & = & u_1 \\ -2e_2 & = & u_2 - u_1 \end{array} \right. \quad .$$

Il en résulte : $e_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 - u_2)$. Remplaçons e_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient :

$$e_1 = u_1 - e_2 = u_1 - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad .$$

Ainsi :

$$\left[\begin{array}{ccl} e_1 & = & \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ e_2 & = & \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \quad . \end{array} \right. \quad .$$

2) Métode 2 : La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ à la base (u_1, u_2) est :

$$P = M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Calculons son inverse à l'aide de son déterminant et de sa comatrice, on obtient :

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Mais $P^{-1} = M_{(u_1,u_2)}\mathcal{B}(u_1, u_2)$. Autrement dit, les colonnes de P^{-1} donnent les coordonnées de e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2). Nous retrouvons le résultat précédent.

3) (a, b) et (A, B) sont liés par les formules :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi :

$$\left[\begin{array}{ccl} A & = & \frac{1}{2}(a + b) \\ B & = & \frac{1}{2}(a - b) \end{array} \right. \quad , \quad \left[\begin{array}{ccl} a & = & A + B \\ b & = & A - B \quad . \end{array} \right.$$

Solution de l'exercice 25 :

Le sous-espace vectoriel F_1 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \quad . \end{array} \right.$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_3 et x_4. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 = -3x_3 + 3x_4 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 = \{(-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) + x_4(3, -2, 0, 1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-3, 1, 1, 0), (3, -2, 0, 1)$ est une base de F_1.

Le sous-espace vectoriel F_2 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E'_1) \\ x_4 & = & 0 & (E'_2) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_2 et x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_2 = \{(-2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_2 = \{x_2(-2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille de deux vecteurs $(-2,1,0,0),(-1,0,1,0)$ est une base de F_2.

L'ensemble $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ comme intersection de deux tels sous-espaces vectoriels. Il est constitué des solutions du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. \quad .$$

Soit :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est triangulé. Il possède une seule variable libre : x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_2 = x_3 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -3x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 \cap F_2 = \{(-3x_3, x_3, x_3, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 \cap F_2 = \{x_3(-3,1,1,0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

L'algorithme de résolution d'un systéme d'équations linéaires homogènes donnant une base de l'espace vectoriel de ses solutions, la famille d'un vecteur $(-3,1,1,0)$ est une base de $F_1 \cap F_2$.

Correction de l'exercice 26 :

Solution de 3

1 Les variables du système (E) sont naturellement ordonnées. Les trois équations de (E) sont d'ordre 1. Le système (E) a même solution que le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_1) \\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & - & 8x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \qquad (E_3' = E_3 - 3E_1) \end{array}\right. .$$

La première équation est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Le système (E) a même solution que le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_1) \\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_2' = E_2 - 2E_1) \\ & & & & & & 0 & = & 0 \qquad (E_3' - 2E_2') \end{array}\right. .$$

Ou encore, même solution que le système triangulé :

$$(E') \quad \left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_1) \\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_2' = E_2 - 2E_1) \end{array}\right. .$$

Ce système admet pour variables libres : x_3 et x_4.

La deuxième équation du système triangulé (E') donne :

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \quad .$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient :

$$x_1 = -4x_2 + 3x_4 = x_3 \quad .$$

Il en résulte :

$$P=\{(x_3,-\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4,x_3,x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4\in\mathbf{R}\} \quad .$$

$$P=\{x_3(1,-\frac{1}{4},1,0)+x_4(0,\frac{3}{4},0,1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4\in\mathbf{R}\} \quad .$$

Les deux vecteurs $(e_1=(1,-\frac{1}{4},1,0),e_2=(0,\frac{3}{4},0,1))$ forment clairement une famille génératrice de P. On vérifie facilement qu'ils forment une famille libre de $\mathbf{R}^4$. Ainsi, (e_1,e_2) forment une base de P. Nous pourrons noter que la liberté de (e_1,e_2) se déduit facilement de

$$ae_1+be_2=a(1,-\frac{1}{4},1,0)+b(0,\frac{3}{4},0,1)=(a,-\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b,a,b) \quad .$$

2) Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les deux quadruplets de réels $(1,-1,1,-1)$ et $(0,3,0,4)$ vérifient chacun les deux équations du systéme (E').

3) u appartient donc à P de base (e_1,e_2). Il existe donc deux réels a et b tels que :

$$u=(1,-1,1,-1)=ae_1+be_2=(a,-\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b,a,b) \quad .$$

Nous en déduisons $a=1$ et $b=-1$. Ainsi $(1,-1)$ sont les coordonnées de u dans la base (e_1,e_2) de P. Nous constatons d'autre part que $v=4e_2$, donc $(0,4)$ sont les coordonnées de v dans la base (e_1,e_2) de P.
4) La matrice dont les colonnes sont les cordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Son déterminant est 4. Elle est donc inversible et (u,v) est donc une base de P.

5) $P\cap F$ est formé des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & 4x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_1) \\ & - & 4x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \qquad (E_2'=E_2-2E_1) \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \qquad . \end{array}\right.$$

Résolvons ce système qui est d'ailleurs triangulé. On a : $x_4 = x_3 = 0$. Nous en déduisons $x_2 = 0$ et en reportant dans la première équation $x_1 = 0$. Ainsi, ce sytème admet $(0, 0, 0, 0)$ comme unique solution. Cela montre que $P \bigcap F = \{0\}$.

6)

$$F = \{(x_1, x_2, 0, 0) \text{ tels que } x_1 \ , \ x_2 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$P = \{x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) \text{ tels que } x_3 \ , \ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Il en résulte que $(e_3 = (1, 0, 0, 0), e_4 = (0, 1, 0, 0))$ est une famille génératrice de F. Comme c'est une famille libre, c'est une base de F.

7) Supposons que x' et x'' existent. Nous avons $x'' = (x''_1, x''_2, 0, 0)$ et il existe deux rées a et b tels que

$$x' = ae_1 + be_2 = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) \quad .$$

On en déduit :

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b, a, b) + (x''_1, x''_2, 0, 0) \quad .$$

Soit :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + x''_1, -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b + x''_2, a, b) \quad .$$

Il en résulte $a = x_3$, $b = x_4$, puis :

$$x''_2 = x_2 + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b = x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \quad .$$

et

$$x''_1 = x_1 - a = x_1 - x_3 \quad .$$

Inversement, nous avons bien :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4) + (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0) \quad .$$

Ainsi, $x' = x_3e_1 = x_4e_2 = (x_3, -\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4, x_3, x_4)$ et $x'' = (x_1 - x_3, x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, 0, 0)$ convient.

4 Sous-Espaces Vectoriels

4.1 Enoncés

Exercice 27 – Nous considérons le sous-espace vectoriel F_1 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array} \right. .$$

et le sous-espace vectoriel F_2 de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(**) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1') \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. .$$

Préciser F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ et une base de ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 28 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Notons : $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3$, $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$ et considérons $H = Vect(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner à l'aide d'un algorithme du cours une base de H. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) ?
2) Donner à l'aide d'un algorithme du cours des équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$.
3) Déterminer l'ensemble des réels a, b, c tels que :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad .$$

Exercice 29 – 1) Nous considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ formé des solutions du système suivant :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Donner une base de F. Quelle est sa dimension ?
2) Soit $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (2,-1,2,-1), u_3 = (4,1,4,1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Soit $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Donner une base de G constituée de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ échelonnées relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Donner un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 30 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$. Nous notons $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
1) Montrer que la famille (u_1, u_2) est libre. Pourquoi (u_1, u_2) est alors une base de F.
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.
Nous notons $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) Montrer que $F \cap G = \{0\}$. En déduire $E = F \oplus G$.

Exercice 31 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$, $u_3 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $u_4 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_4$. Nous notons $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
1) Donner une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Quelle est la dimension de F ?
Nous notons $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) En déduire $E = F \oplus G$.
5) Préciser la décomposition du vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 32 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ $u_2 = 2e_1 - 3e_2 + e_4$ et $u_3 = 3e_1 - 5e_2 + e_3 + e_4$. Nous notons $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.
2) Donner un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Quelle est le dimension de F ?
Nous notons $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.
3) Préciser une base de G. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
4) En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
5) Préciser la décomposition du vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 33 – Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$. On note $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
1) Donner une base de F échelonnée relativement à la base $\mathcal{B}$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F.
2) Donner un système d'équations de F.
Nous notons $D = \mathrm{Vect}(e_1)$.
3) Montrer que $D \cap F = \{0\}$.
4) En déduire $E = D \oplus F$.

Exercice 34 – Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ d'équation :

$$H \ : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \, . \end{array} \right.$$

Posons $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, 0, 0)$. Notons $L = \mathrm{Vect}(u, v)$.
1) Déterminer le sous-espace vectoriel $H \cap L$. Puis préciser une base de H. 2) Montrer que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit a, b, c, d quatre réels, préciser la décomposition du vecteur (a, b, c, d) de $\mathbf{R}^4$, comme somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de L.

Exercice 35 – Soit $u_1 = (1, 1, -1, -1), u_2 = (1, 2, 1, -3), u_3 = (-2, 1, -2, 1)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^4$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
1) Donner une base de H constituée de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ échelonnées relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
2) Donner un système d'équations de H relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
3) Soit $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_4)$. Montrer que $F \cap H = \{0\}$. En déduire que H et F sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.
4) Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Déterminer $v \in F$ et $w \in H$ tels que $u = v + w$. Préciser v et w.

Exercice 36 – Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y + 2z + t & = & 0 \end{array} \right.$$

1) Sans calcul, justifier que P est de dimension 2. Puis déterminer une base (u_1, u_2) de P.
Soit $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2 = (1,0,1,0)$. On note $V = \text{vect}(v_1, v_2)$.
2) Montrer que (v_1, v_2) est une base de V.
3) Montrer que $P + V = \text{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. En déduire une base de $P + V$ échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
4) En déduire que P et V ne sont pas supplémentaires. Donner une base de $P \cap V$.
Soit $v_3 = (1,1,0,0)$. On note $W = \text{vect}(v_1, v_3)$.
5) Nous admettrons que P et W sont supplémentaires. Expliciter la projection sur W parallélement à P.

4.2 Corrections

Correction de l'exercice 27

Le sous-espace vectoriel F_1 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_3 et x_4. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_2 = x_3 - 2x_4 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - x_4 = -3x_3 + 3x_4 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 = \{(-3x_3 + 3x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R})\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 = \{x_3(-3,1,1,0) + x_4(3,-2,0,1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille de deux vecteurs $(-3,1,1,0),(3,-2,0,1)$ est une famille génératrice de F_1. Elle est libre, en renversant les calculs :

$$x_3(-3,1,1,0)+x_4(3,-2,0,1)=(-3x_3+3x_4,x_3-2x_4,x_3,x_4)=0$$

implique clairement $x_3=x_4=0$. C'est une base de F_1.

Le sous-espace vectoriel F_2 est par définition constitué des solutions du système d'équations linéaires homogènes :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E'_1) \\ x_4 & = & 0 & (E'_2) \end{array}\right. .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres en sont x_2 et x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4=0 \quad .$$

Puis :

$$x_1=-2x_2-x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_2=\{(-2x_2-x_3,x_2,x_3,0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3\in\mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_2=\{x_2(-2,1,0,0)+x_3(-1,0,1,0) \text{ tels que } x_2\ ,\ x_3\in\mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille de deux vecteurs $(-2,1,0,0),(-1,0,1,0)$ est une famille génératrice de F_2. Elle est libre (même argument que précedemment). C'est une base de F_2.

L'ensemble $F_1\cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ comme intersection de deux tels sous-espaces vectoriels. Il est constitué des solutions du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$(*)\left\{\begin{array}{rcll} x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2-x_3+2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E'_1) \\ x_4 & = & 0 & (E'_2) \end{array}\right. .$$

Soit :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 0 & (E_2) \\ x_4 & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. .$$

Ce système est triangulé. Il possède uen seule variable libre : x_3. Résolvons le en suivant notre algorithme. Nous obtenons :

$$x_4 = 0 \quad .$$

Puis :

$$x_2 = x_3 \quad .$$

Puis :

$$x_1 = -2x_2 - x_3 - x_4 = -3x_3 \quad .$$

Il vient :

$$F_1 \cap F_2 = \{(-3x_3, x_3, x_3, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit :

$$F_1 \cap F_2 = \{x_3(-3, 1, 1, 0) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Ainsi, la famille d'un vecteur $(-3, 1, 1, 0)$ est une famille génératrice de $F_1 \cap F_2$. Elle est libre, car est ce vecteur est non nul. C'est une base de $F_1 \cap F_2$.

Correction de l'exercice 28

1) L'algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ (dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de H relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 1 : Posons $u_1' = u_1$, $u_2' = u_2 - 2u_1$ et $u_3' = u_3 - u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1', u_2', u_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} .$$

On a $H = \mathrm{Vect}(u_1', u_2', u_3')$.
Etape 2 : Posons $u_1'' = u_1'$, $u_2'' = u_2'$ et $u_3'' = u_3' - u_2'$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nous avons $H = \mathrm{Vect}(u_1'', u_2'', u_3'') = \mathrm{Vect}(u_1'', u_2'')$, car $u_3'' = 0$.
La famille $u_1'' = e_1 - 2e_2 + e_3, u_2'' = 3e_2 - 3e_3$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre H. C'est donc une base de H échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.Le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) est par définition la dimension de H. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc de rang 2.

2) Un deuxième algorithme du cours donne un système d'équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$ de E en partant de $u_1'' = e_1 - 2e_2 + e_3, u_2'' = 3e_2 - 3e_3$ base de H échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$. Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -2 & 3 & x_2 \\ 1 & -3 & x_3 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u' = u - x_1 u_1'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & x_2 + 2x_1 \\ 1 & -3 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u'' = u' - (1/3)(x_2 + 2x_1)u_2'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & (x_3 - x_1) + (x_2 + 2x_1) \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Nus avons $u \in H$ si et seulement si $u'' \in H$. Le vecteur u'' a sa première coordonnée et sa deuxième cordonnée nulle. Les vecteurs de la famille echelonnée (u_1'', u_2'') sont respectivement d'ordre 1 et 2. Il en résulte, que le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à H si et seulement si

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad .$$

Cette équation est donc un système d'équations de H relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) Les coordonnées de $au_1 + bu_2 + cu_3$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + c \\ -2a - b + c \\ a - b - 2c \end{pmatrix}$$

Un vecteur est nul si et seulement si ses coordonnées dans une base sont nulles. Ainsi, nous avons à déterminer l'ensemble Σ des triplets de réels (a, b, c) solutions du système homogène d'équations linéaires :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a + 2b + c & = & 0 & (E_1) \\ -2a - b + c & = & 0 & (E_2) \\ a - b - 2c & = & 0 & (E_3) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a + 2b + c & = & 0 & (E_1) \\ 3b + 3c & = & 0 & (E_2' = E_2 + 2E_1) \\ -3b - 3c & = & 0 & (E_3' = E_3 - E_1) \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a + 2b + c & = & 0 & (E_1) \\ 3b + 3c & = & 0 & (E_2') \\ 0 & = & 0 & (E_3' - E_2') \end{array} \right. \quad .$$

Ce système a même solution que le système :

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} a+2b+c & = & 0 & (E_1) \\ 3b+3c & = & 0 & (E_2') \end{array} \right. .$$

qui est un système triangulé de variables libres c. Nous obtenons :

$$b = -c \quad .$$

Nous obtenons alors :

$$a = -2b - c = c \quad .$$

Il en résulte :

$$\Sigma = \{(c, -c, c) \text{ tels que } c \in \mathbf{R}\} \quad .$$

$$\Sigma = \{c(1, -1, 1) \text{ tels que } c \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Pour vérifier ce calcul, on peut constater que $u_1 - u_2 + u_3 = 0$.

Correction de l'exercice 29

1) L'ordre des variables x_1, x_2, x_3, x_4 est l'ordre naturel. Les trois équations de (E) sont d'ordre 1. Le système est donc ordonné. Démarrons l'algorithme de triangulation.
Étape 1 : Utilisons (E_1) pour faire monter l'ordre des équations suivantes. Le système suivant à mêmes solutions que (E) :

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 0 & (E_1) \\ x_2-2x_3+x_4 & = & 0 & (E_2' = E_2 - E_1) \end{array} \right. .$$

Les équations E_1, E_2', sont respectivement d'ordre $1, 2$. Ce sytème est ordonné.
Ce système est triangulé. Le première algorithme est terminé.

Résoudre (E) revient donc à résoudre le système triangulé (E'). La variable de tête de (E_1) est x_1, la variable de tête de (E_2') est x_2, Les variables libres de (E') sont donc x_3, x_4. Résolvons ce système triangulé en suivant la méthode du cours. La dernière équation donne :

$$x_2 = 2x_3 - x_4 \quad .$$

Remplaçons cette valeur de x_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_3 + x_4 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$x_1 = -3x_3 \quad .$$

Nous avons ainsi exprimé x_1 et x_2 à l'aide des variables libres. Ainsi, l'ensemble F des solutions de (E) est :

$$F = \{(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Soit : $F = \{x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1) \quad \text{tels que} \quad x_3, x_4, \in \mathbf{R}\} \quad .$
La famille $(-3, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)$ est donc une famille génératrice de F. Elle est libre car si

$$x_3(-3, 2, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1) = 0 \quad ,$$

nous obtenons :

$$(-3x_3, 2x_3 - x_4, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

et $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $((-3, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ est une base de F.

2) Notons $E = \mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1) \quad .$$

nous avons : $v(u_1) = v(u_2) = v(u_3) = 1$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \quad .$$

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1,u'_2,u'_3)=\begin{pmatrix} u'_1=u_1 & u'_2=u_2-2u_1 & u'_3=u_3-4u_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad G=\mathrm{Vect}(u'_1,u'_2,u'_3) \ .$$

On a $v(u'_1)<v(u'_2)=v(u'_3)=2$.

Étape 3 : Nous utilisons u'_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1,u''_2,u''_3)=\begin{pmatrix} u''_1=u'_1 & u''_2=u'_2 & u''_3=u'_3-u'_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad G=\mathrm{Vect}(u''_1,u''_2) \ .$$

On a $v(u''_1)<v(u''_2)$ L'algorithme est terminé et la famille $(u''_1=(1,1,1,1),u''_2=(0,-3,0,-3))$ est donc une base de G échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3) La famille (u''_1,u''_2) est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit u de coordonnées

(x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$. .

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1'' & u_2'' & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & -3 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 1 & -3 & x_4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 1 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u - x_1 u_1'') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1'' & u_2'' & u^{(1)} = u - x_1 u_1'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 1 & -3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad u^{(1)} = u - x_1 u_1'' \; .$$

On a $u \in F$ équivaut à $u^{(1)} \in F$.

Étape 2 :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', , u^{(2)} = u^{(1)} + (1/3)(x_2 - x_1) u_2'' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1'' & u_2'' & u^{(2)} = u^{(1)} + (1/3)(x_2 - x_1) u_2'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 1 & -3 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} = (0, 0, x_3 - x_1, x_4 - x_2) \in F$.

L'algorithme est terminé. Les deux premières coordonnées de $u^{(2)}$ sont nulles et u_1'', u_2'' sont d'ordre 1 et 2 relativement à $\mathcal{B}$ Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans F si et seulement si $u^{(2)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 0 \quad .$$

Le système :

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

est un système d'équations de G relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Correction de l'exercice 30

1) Soient a, b réels tels que $au_1 + be_2 = 0$. Nous obtenons :

$$a(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) + b(e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4) = 0 \quad .$$

Soit :

$$(a+b)e_1 + (a+2b)e_2 + (-a+b)e_3 + (a+b) = 0 \quad .$$

Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de E, c'est une famille libre. Nous obtenons alors :

$$(a+b) = (a+2b) = (-a+b) = (a+b) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est donc libre. Par définition de F, tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2. Ainsi, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. Or, c'est une famille libre. C'est donc, (u_1, u_2) est une base de F.

2) Considérons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 dans la $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Utilisons la première colonne de cette matrice pour faire monter l'ordre de la deuxième :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est echelonnée. Donc, $(u_1, u_2 - u_1)$ est une base de F echelonnée par rapport ? la base $\mathcal{B}$. En fait, cela remontre aussi que (u_1, u_2) est une famille libre (voir le cours).
Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u - x_1u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ -1 & 2 & x_3 + x_1 \\ 1 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons : $u \in F$ si et seulement si $u - x_1u_1 \in F$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1, u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & x_3 + x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement si $u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1) \in F$. Le vecteur $u - x_1u_1 - (x_2 - x_1)(u_2 - u_1)$ a sa première coordonnée et sa deuxième cordonnée nulle. Les vecteurs de la famille echelonnée $(u_1, u_2 - u_1)$ sont respectivement d'ordre 1 et 2. Il en résulte, $u \in F$ si et seulement si : $x_3 + x_1 - 2(x_2 - x_1) = x_4 - x_1 = 0$.
Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_4 - x_1 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

est un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) La famille (e_1, e_2) est libre, car c'est une sous-famille de la famille libre (e_1, e_2, e_3, e_4). Comme (e_1, e_2) engendre G, c'est une base de G. Si $u \in F \cap G$, u est un vecteur de G. Ainsi, il existe deux réels a et b tels

que $u = ae_1 + be_2$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(a, b, 0, 0)$. Ces coordonnées vérifient dons le système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, nous obtenons :

$$3a - 2b = -a = 0 \quad .$$

Nous en déduisons $a = b = 0$ et $u = 0$. Il en résulte $F \cap G = \{0\}$.

4) En utilisant la formule de dimension :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G = 2 + 2 = 4$$

Le sous-espace vectoriel $F + G$ est donc un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E. Il est donc égal à E. Nous avons donc $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$. Ainsi, $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 31

1) L'algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ (dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de F relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Etape 1 : Posons $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2 - u_1$, $u'_3 = u_3 - u_1$, et $u'_4 = u_4 - 2u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On a $F = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4)$.

Etape 2 : Posons $u''_1 = u'_1$, $u''_2 = u'_2$, $u''_3 = u'_3 + 2u'_1$, et $u''_4 = u'_4 - u'_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a $F = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3)$, car $u''_4 = 0$.
La famille $u''_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4, u''_2 = e_2 + 2e_3, u''_3 = 6e_3 - 2e_4$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre F. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Le rang de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est par définition la dimension de F. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est donc de rang 3.

2) Un deuxième algorithme du cours donne un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E. Il part de la base (u''_1, u''_2, u''_3) de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & 6 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u' = u - x_1 u''_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 - x_1 \\ -1 & 2 & 6 & x_3 + x_1 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u'' = u' - (x_2 - x_1)u''_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & x_3 + x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 0 & -2 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & x_3 + 3x_1 - 2x_2 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u''') = u'' - \frac{1}{6}(x_3 + 3x_1 - 2x_2)u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 - x_1 - 2(-(1/6)(x_3 + 3x_1 - 2x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u - x_1u_1'' - (x_2 - x_1)u_2'' - (-\frac{1}{6}(x_3 + 3x_1 - 2x_2)u_3'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2) \end{pmatrix} \quad .$$

On a $u \in F$ si et seulement si $u''' \in F$. Le vecteur u''' a ses trois premières coordonnées nulles et les vecteurs u_1'', u_2'', u_3'' sont respectivemnt d'ordre 1, 2 et 3 par rapport à la base $\mathcal{B}$. Ainsi, le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à F si et seulement si

$$x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \quad .$$

Cette équation est donc un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) La famille réduite à l'élément $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est libre, car le vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est non nul (Pour tout $\lambda \in K$ et $v \in E$, $\lambda v = 0$ et $\lambda \neq 0$, implique $v = 0$. Donc $v \neq 0$ et $\lambda v = 0$ implique $\lambda = 0$). Ce vecteur engendre G par définition. La famille $\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est donc une base de G.

Si $u \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont alors (a, a, a, a). Si de plus, $u \in F$, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation :

$$a + (1/3)a - (2/3)a = 0 \quad .$$

Il en résulte $a = 0$, puis $u = 0$. Donc, $F \cap G = \{0\}$.

4) D'après la formule de dimension :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G) - \dim(F \cap G) = 3 + 1 - 0 = 4 \quad .$$

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de E qui est un espace vectoriel de dimension 4. Donc, $F + G = E$. Commme $F \cap G = \{0\}$, on a bien $E = F \oplus G$.

5) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$. Il s'écrit d'après la question précédente de façon unique :

$$u = u' + u'' \quad \text{avec} \quad u' \in F \quad \text{et} \quad u'' \in G \quad .$$

Soit (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) les coordonnées de u' dans le base $\mathcal{B}$ et $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ les coordonnées de u'' dans le base $\mathcal{B}$. Comme $u'' \in G$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Nous avons donc : $x''_1 = x''_2 = x''_3 = x''_4 = a$. Comme $u = u' + u''$: $x_i = x'_i + x''_i = x'_i + a$. Nous en déduisons $x'_i = x_i - a$. Comme $u' \in F$, les corrdonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$ vérifient l'équation déterminée à la question 2. Ainsi :

$$(x_4 - a) + \frac{1}{3}(x_3 - a) - \frac{2}{3}(x_2 - a) = 0$$

Il en résulte :

$$\frac{2}{3}a = x_4 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_2 \quad \text{et} \quad a = \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2$$

Ainsi :

$$u'' = (\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

$$u' = u - u'' = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 - (\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - x_2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

Soit :

$$u' = (x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_1 + (2x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4)e_3 + (x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4)e_4 \quad .$$

Correction de l'exercice 37

1) Un algorithme du cours fournit à l'aide de la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$ (dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de u_j dans la base $\mathcal{B}$) une base échelonnée de F relativement à cette base.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Etape 1 : Posons $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2 - 2u_1$ et $u'_3 = u_3 - 3u_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1, u'_2, u'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a $F = \mathrm{Vect}(u'_1, u'_2, u'_3)$.
Etape 2 : Posons $u''_1 = u'_1$, $u''_2 = u'_2$ et $u''_3 = u'_3 - u'_2$:

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a $F = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3) = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2)$, car $u''_3 = 0$.
La famille $u''_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, u''_2 = e_2 - 2e_3 + e_4$ est libre (car échelonnée par rapport à la la base $\mathcal{B}$) et engendre F. C'est donc une base de F échelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$.

2) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -2 & 1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u - x_1 u_1'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & x_2 + 2x_1 \\ 1 & -2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons : $u \in F$ si et seulement si $u - x_1 u_1'' \in F$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u - x_1 u_1'' - (x_2 + 2x_1) u_2'')) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & (x_3 - x_1) + 2(x_2 + 2x_1) \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 - 2x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement si $u'' = u - x_1 u_1'' - (x_2 + 2x_1) u_2'' \in F$. Les deux premières coordonnées de u'' sont nulles et les vecteurs u_1'', u_2'' d'ordres respectivement 1 et 2 dans la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons alors, $u \in F$ si et seulement si : $(x_3 - x_1) + 2(x_2 + 2x_1) = x_4 - x_2 - 2x_1 = 0$. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est donc un système d'équations de F relativement à la base $\mathcal{B}$ de E.

3) Montrons que la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est libre. Soit a, b deux réels tels que :

$$a e_1 + b(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$(a+b)e_1 + be_2 + be_3 + be_4 = 0 \quad .$$

Il en résulte :

$$a+b = b = 0 \quad .$$

Soit $a = b = 0$. Ainsi la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est libre. Comme cette famille engendre G, la famille $\{e_1, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$ est une base de G.

Nous noterons que la famille $\{e_1, e_2 + e_3 + e_4\}$ est une base de G echelonnée par rapport à la base $\mathcal{B}$. Par la suite, nous utiliserons cette base de G pour simplifier les calculs.

Si $u \in G$, il existe a, b deux réels tels que $u = ae_1 + b(e_2 + e_3 + e_4)$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc (a, b, b, b). Si nous supposons alors que u appartient aussi à F, les coordonnées de u vérifient le système d'équation de F. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} 3a + 2b + b = 0 \\ -2a - b + b = 0 \end{cases} \quad .$$

D'où, $a = b = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $F \cap G = \{0\}$.

4) Nous venons de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Comme :

$$\dim(E) = 4 = 2 + 2 = \dim F + \dim G \quad ,$$

il en résulte que $E = F \oplus G$.

5) Soit $u \in E$, u s'écrit de façon unique $u = u' + u''$ avec $u' \in F$ et $u'' \in G$. Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) les coordonnées de u' dans la base $\mathcal{B}$. Il existe λ et μ deux réels tel que

$$u'' = \lambda e_1 + \mu(e_2 + e_3 + e_4) \quad .$$

Déterminons (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) et (λ, μ) à l'aide de (x_1, x_2, x_3, x_4). En passant en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, l'équation $u = u' + u''$ se traduit par :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) + (\lambda, \mu, \mu, \mu) \quad .$$

Il en résulte :

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = (x_1 - \lambda, x_2 - \mu, x_3 - \mu, x_4 - \mu) \quad .$$

Ainsi, $(x_1 - \lambda, x_2 - \mu, x_3 - \mu, x_4 - \mu)$ est solution du système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3\lambda + 3\mu \\ -2x_1 - x_2 + x_4 & = & -2\lambda \quad . \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \lambda & = & x_1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2} \\ \mu & = & \dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 \quad . \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} u'' & = & \lambda e_1 + \mu(e_2 + e_3 + e_4) \\ & = & (x_1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2})e_1 + (\dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4)(e_2 + e_3 + e_4) \\ u' & = & u - u'' \\ & = & (-\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2})e_1 + (\frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_4)e_2 + (-\frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{2}x_4)e_3 + (-\frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{2}x_4)e_4 \quad . \end{cases}$$

Correction de l'exercice 33

1) Considérons la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 dans la $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Utilisons la première colonne de cette matrice pour faire monter l'ordre de la deuxième :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2 - u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cette matrice est echelonnée. Donc, $(u_1, u_2 - u_1)$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. On a $u_2 - u_1 = e_2$, ainsi (u_1, e_2) est une base de F. La dimension de F est donc égal à 2. Le rang de la famille (u_1, u_2) est donc aussi égal à 2.

2) Soit u un vecteur de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x - x_1 u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, e_2, x - x_1 u_1 - (x_2 - x_1)e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous avons $u \in F$ si et seulement $u'' = x - x_1 u_1 - (x_2 - x_1)e_2 \in F$. Les deux premières coordonnées de u'' sont nulles et les vecteurs (u_1, e_2) de la base échelonnée de F dans la base $\mathcal{B}$ sont d'ordres respectivement 1 et 2 dans la base $\mathcal{B}$. Nous obtenons alors, $u \in F$ si et seulement si : $x_3 - x_1 = 0$. Ainsi,

$$x_3 - x_1 = 0$$

est un système d'équation de F dans la base $\mathcal{B}$.

3) Soit $u \in D \cap F = \{0\}$. Comme u appartient à D, il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda e_1$. Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont donc : $(\lambda, 0, 0)$. Traduisons en utilisant le système d'équations de F dans la base $\mathcal{B}$ donné dans la question précédente que $u \in F$. Nous obtenons $\lambda - 0 = 0$. Soit $\lambda = 0$, soit $u = 0$. Nous avons ainsi montré que $D \cap F = \{0\}$.

4) D'aprés un résultat du cours, D et F sont supplémentaire si :

$$\dim_K D + \dim_K F = \dim_K E \quad \text{et} \quad D \cap F = \{0\} \quad .$$

Le vecteur e_1 est non nul. C'est donc une base de $D = \mathrm{Vect}(e_1)$. Ainsi, D est de dimension 1. Nous avons vu que F est de dimension 2. Ainsi, $1 + 2 = 3 = \dim_K E$. Comme, d'après la question précédente $D \cap F = \{0\}$, nous avons bien :

$$E = D \oplus F$$

Correction de l'exercice 34

1) Soit $w \in H \cap L$. Traduisons que $w \in L$: il existe a et b réels tels que :

$$w = au + bv = a(1,1,1,1) + b(1,0,0,0) = (a+b, a, a, a) \quad .$$

Comme $w \in H$, ses ocordonnées vérifient les équations de H. On obtient :

$$\begin{cases} (a+b) + a + a + a & = & 0 \\ (a+b) - a + a - a & = & 0 \, . \end{cases}$$

Soit $4a + b = 0$ et $b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$ et $w = 0$. Nous avons ainsi montré que $H \cap L = \{0\}$.
2) Le vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \, . \end{cases}$$

ou encore si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \, . \end{cases}$$

Ce système est triangulé de variable libre x_4 et x_3, on obtient : $x_2 = -x_4$ et $x_1 = -x_3$. Ainsi, $H = \{x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1)$ tels que $x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\}$. La famille $(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)$ est donc une famille générarice de H. Elle est libre, car si

$$x_3(-1,0,1,0) + x_4(0,-1,0,1) = 0$$

nous obtenons :

$$(-x_3n - x_4, x_3, x_4) = (0,0,0,0)$$

et $x_3 = x_4 = 0$. Ainsi, $(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)$ est une base de H. En particulier, $\dim_{\mathbf{R}}(H) = 2$.

Nous montrons facilement que la famille (u,v) est libre. Elle engendre L par définition. C'est donc une base de L et $\dim_{\mathbf{R}}(L) = 2$.

Ainsi, nous avons :

$$H \cap L = \{0\} \quad , \quad \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^4 = 2 + 2 = \dim_{\mathbf{R}}(H) + \dim_{\mathbf{R}}(L) \quad .$$

Cela assure que H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

2) Comme H et L sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^4$, le vecteur (a,b,c,d) de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de façon unique :

$$(a,b,c,d) = l + h \quad \text{avec} \quad l \in L \quad \text{et} \quad h \in H \quad .$$

Traduisons que $l \in L$: il existe a et b réels tels que :

$$l = \alpha u + \beta v = \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,0,0,0) = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha) \quad .$$

On obtient :

$$h = (a,b,c,d) - (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha) = (a - \alpha - \beta, b - \alpha, c - \alpha, d - \alpha) \quad .$$

Exprimons que $h \in H$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c + d & = & 4\alpha + \beta \\ a - b + c - d & = & \beta\ . \end{array} \right.$$

Il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\beta & = & a-b+c-d\\ \alpha & = & \frac{1}{2}(b+d)\ .\end{array}\right.$$

Nous en déduisons :

$$l=(a-\frac{b}{2}+c-\frac{d}{2},\frac{b}{2}+\frac{d}{2},\frac{b}{2}+\frac{d}{2},\frac{b}{2}+\frac{d}{2}) \quad , \quad h=(\frac{b}{2}-c+\frac{d}{2},\frac{b}{2}-\frac{d}{2},-\frac{b}{2}+c\frac{d}{2},-\frac{b}{2}+\frac{d}{2}) \quad .$$

Correction de l'exercice 35

1) Notons $E=\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$e_1=(1,0,0,0),e_2=(0,1,0,0),e_3=(0,0,1,0),e_3=(0,0,0,1) \quad .$$

Nous avons : $v(u_1)=v(u_2)=v(u_3)=1$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,u_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad H=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \quad .$$

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u'_1,u'_2,u'_3)=\begin{pmatrix}u'_1=u_1 & u'_2=u_2-u_1 & u'_3=u_3+2u_1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ -1 & 2 & -4\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad H=\mathrm{Vect}(u'_1,u'_2,u'_3)\ .$$

On a $v(u'_1)<v(u'_2)=v(u'_3)=2$.

Étape 3 : Nous utilisons u'_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u''_1 = u'_1 & u''_2 = u'_2 & u''_3 = u'_3 - 3u'_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad H = \mathrm{Vect}(u''_1, u''_2, u''_3) \ .$$

On a $v(u''_1) < v(u''_2) < v(u''_3)$ L'algorithme est terminé et la famille :

$$(u''_1 = (1, 1, -1, -1), u''_2 = (0, 1, 2, 2), u''_3 = (0, 0, -10, 5))$$

est donc une base de H échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

2) La famille (u''_1, u''_2, u''_3) est échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Soit u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$.

$$M_{\mathcal{B}}(u''_1, u''_2, u''_3, u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u''_1 & u''_2 & u''_3 & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

Étape 1 : $u^{(1)} = u - x_1 u''_1$:

$$M_{\mathcal{B}}(, u''_2, u''_3, u^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u''_1 & u''_2 & u''_3 & u^{(1)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 - x_1 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 + x_1 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 + x_1 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

On a $u \in F$ équivaut à $u^{(1)} \in F$.

Étape 2 : $\quad u^{(2)} = u^{(1)} - (x_2 - x_1)u_2''$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1'', u_2'', u_3'', u^{(2)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u^{(2)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & x_3 + 3x_1 - 2x_2 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 - x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(2)} = (0, 0, x_3 + 3x_1 - 2x_2, x_4 - x_1 + 2x_2) \in F$.

Étape 3 : $\quad u^{(3)} = u^{(2)} + (1/10)(x_3 + 3x_1 - 2x_2)u_3'''$:

$$M_{\mathcal{B}}(u_1''', u_2''', u_3''', u^{(3)}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1'' & u_2'' & u_3'' & u^{(3)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & x_4 + (1/2)x_1 + x_2 + (1/2)x_3 \end{pmatrix} \end{array} \quad .$$

et $u \in F$ équivaut à $u^{(3)} = (0, 0, 0, x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3) \in F$.

L'algorithme est terminé. Le vecteur $u^{(3)}$ a ses trois premières coordonnées nulles et u_1''', u_2''', u_3''' sont respectivement d'ordre 1, 2 et 3 relativement à la base $\mathcal{B}$. Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base canonique $\mathbf{R}^4$ est dans H si et seulement si $u^{(3)} = 0$. Donc, si et seulement si :

$$x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \quad .$$

Cette équation est est un système d'équations de F relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3) Soit $u \in F \cap H$. Donc , $u \in F$. Par définition de F, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$u = au_4 = a(1, 1, 1, 1) = (a, a, a, a) \quad .$$

Comme $u \in H$, les coordonnés de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ vérifient l'équation de H. Nous devons alors avoir :

$$a + \frac{1}{2}a + a + \frac{1}{2}a = 0 \quad .$$

Soit $3a = 0$, soit $a = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $F \cap H = \{0\}$.

Dans la question 2, nous avons vu que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3. Comme F est engendré par un vecteur non nul, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 1. Ainsi :

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^4 = 4 = 1 + 3 = \dim_{\mathbf{R}} F + \dim_{\mathbf{R}} H \quad .$$

Comme nous venons de montrer que $F \cap H = \{0\}$, F et H sont donc supplémentaires :

$$\mathbf{R}^4 = F \oplus H \quad ;$$

4) Puisque F et H sont supplémentaires, il existe $v \in F$ et $w \in H$ uniques tels que $u = v + w$. Comme $v \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$v = au_4 = a(1,1,1,1) = (a,a,a,a) \quad .$$

Il en résulte :

$$w = u - v = (x_1, x_2, x_3, x_4) - (a,a,a,a) = (x_1 - a, x_2 - a, x_3 - a, x_4 - a) \in H \quad .$$

Écrivons que les coordonnées de w dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ vérifient l'équation de H :

$$(x_4 - a) + \frac{1}{2}(x_1 - a) + (x_2 - a) + \frac{1}{2}(x_3 - a) = 0 \quad .$$

Nous en déduisons :

$$a = \frac{x_4 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3}{3} = \frac{2x_4 + x_1 + 2x_2 + x_3}{6}$$

Ainsi :

$$v = \frac{2x_4 + x_1 + 2x_2 + x_3}{6}(1,1,1,1)$$

$$w = (\frac{-2x_4+5x_1-2x_2-x_3}{6}, \frac{-2x_4-x_1+4x_2-x_3}{6}, \frac{-2x_4-x_1-2x_2+5x_3}{6}, \frac{4x_4-x_1-2x_2-x_3}{6})$$

Correction de l'exercice 36

1) Un vecteur $(x,y,z,t) \in P$ si et seulement si (x,y,z,t) une solution du systéme d'équations linéaires homogènes :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ \quad y+2z+t &= 0 \end{cases} .$$

Les variables x,y,z,t étant ordonnés naturellement, ce système est triangulé et admet deux variables libres z et t. Ainsi, l'espace vectoriel de ses solutions est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Résolvons ce système. On obtient :

$$y = -2z-t \quad , \quad \text{puis } x = -y-z-t = 2z+t-z-t = z \quad .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P &= \{(z,-2z-t,z,t) \text{ tels que } z\,,\, t\, \in \mathbf{R}\} \\ &= \{z(1,-2,1,0)+t(0,-1,0,1) \text{ tels que } z\,,\, t\, \in \mathbf{R}\} \quad . \end{aligned}$$

La famille $(u_1 = (1,-2,1,0), u_2 = (0,-1,0,1))$ est génératrice de P. Elle est libre. Si $z(1,-2,1,0)+t(0,-1,0,1) = 0$, $(z,-2z-t,z,t)$ est nul et $z=t=0$. La famille $(u_1 = (1,-2,1,0), u_2 = (0,-1,0,1))$ est donc une base de P.

2) Par définition, V est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_1 et v_2. Donc, la famille (v_1,v_2) est une famille génératrice de V. Pour montrer que c' est une base, il suffit donc de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit $a,b \in \mathbf{R}$, tels que $av_1+bv_2 = 0$. Il vient : $(a+b,a,a+b,a) = 0$. D'où $a=0$, puis $b=0$.

3) Soit $w \in P+V$. Par définition de $P+V$, il existe $w_1 \in P$ et $w_2 \in V$ tels que $w = w_1+w_2$. Comme $w_1 \in P$, w_1 s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de sa base (u_1,u_2) : il existe, $a,b \in \mathbf{R}$ tels que $w_1 = au_1+bu_2$. De même, $w_2 \in V$ et w_2 s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de sa base (v_1,v_2) : il existe, $c,d \in \mathbf{R}$ tels que $w_2 = cv_1+dv_2$. Il en résulte $w = au_1+bu_2+cv_1+dv_2$. Donc, $w \in \text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)$. Nous avons donc montré $P+V \subset \text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)$. Inversement, si $w \in \text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)$, il existe $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ tels que $w = au_1+bu_2+cv_1+dv_2$. Ainsi, $w = (au_1+bu_2)+(cv_1+dv_2)$. Comme $au_1+bu_2 \in P$

et $cv_1+dv_2 \in V$, on obtient $w \in P+V$ et $\text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2) \subset P+V$. Finalement, $P+V = \text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)$.

Nous connaissons les coordonnées des vecteurs u_1,u_2,v_1,v_2 dans une base (la base canonique de $\mathbf{R}^4$). Utilisons l'algorithme qui nous donnera une base de $\text{vect}(u_1,u_2,v_1,v_2)$ échelonnée par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,v_1,v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P+V = \text{Vect}(u_1,u_2,v_1,v_2) \quad .$$

Étape 2 : Nous utilisons u_1 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,v_1',v_2') = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1' = v_1 - u_1 & v_2' = v_2 - u_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad P+V = \text{Vect}(u_1,u_2,v_1',v_2') \; .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) = v(v_1') = v(v_2') = 2$.

Étape 3 : Nous utilisons u_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,v_1'',v_2'') = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1'' = v_1' + 3u_2 & v_2'' = v_2' + 2u_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad P+V = \text{Vect}(u_1,u_2,v_1'',v_2'') \; .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) < v(v_1'') = v(v_2'') = 4$

Étape 4 : Nous utilisons u_2 pour faire monter l'ordre des vecteurs suivants :

$$M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, v_1'', v_2''') = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v_1'' & v_2''' = v_2'' - (1/2)v_1'' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P + V = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_1'') \ .$$

On a $v(u_1) < v(u_2) < v(v_1'')$. L'algorithme est terminé et la famille :

$$(u_1 = (1, -2, 1, 0), u_2 = (0, -1, 0, 1), v_1'' = (0, 0, 0, 4))$$

est donc une base de $P+V$ échelonnée relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. $P+V$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ de dimension 3.

4) Dire que P et V sont supplémentaires, c 'est dire $P + V = \mathbf{R}^4$ et $P \cap V\{0\}$. Or, $P + V = \mathbf{R}^4$ est impossible puisque $\mathbf{R}^4$ est de dimension 4 et que nous venons de voir que $P + V$ est de dimension 3. Nous savons que :

$$\dim_{\mathbf{K}} P + \dim_{\mathbf{K}} V = \dim_{\mathbf{K}}(P + V) + \dim_{\mathbf{K}}(P \cap V)$$

Il en résulte $2 + 2 = 3 + \dim_{\mathbf{K}}(P \cap V)$. Soit $\dim_{\mathbf{K}}(P \cap V) = 1$. Une base de $(P \cap V)$ est donc formée par un vecteur non nul de $P \cap V$; or l'algorithme de la question précédente donne :

$$\begin{aligned} 0 &= v_2''' = v_2'' - \frac{1}{2}v_1'' \\ &= (v_2' + 2u_2) - \frac{1}{2}(v_1' + 3u_2) \\ &= (v_2 - u_1 + 2u_2) - \frac{1}{2}(v_1 - u_1 + 3u_2) \\ &= \frac{1}{2}(2v_2 - 2u_1 + 4u_2 - v_1 + u_1 - 3u_2) = \frac{1}{2}(2v_2 - u_1 + u_2 - v_1) \quad . \end{aligned}$$

Il en résulte : $u_1 - u_2 = 2v_2 - v_1$. Le vecteur $u_1 - u_2 = (1, -1, 1, -1)$ est dans P puisque combinaison linéaire de u_1, u_2. Or, il est égal au vecteur $2v_2 - v_1$ qui est dans V comme combinaison linéaire de v_1, v_2. Ainsi,

$u_1 - u_2 \in P \cap V$. Ce vecteur est non nul. Nous avons donc montré que $(u_1 - u_2 = (1, -1, 1, -1))$ est une base de $P \cap V$.

Une autre façon de déterminer une base de $P \cap V$ est de commencer par déterminer un système d'équations de V. Pour cela, nous commençons comme usuellement à déterminer une base échelonnée de V relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$: les calculs donnent que $(v_1 == (1, 1, 1, 1), v' = (0, -1, 0, 1)$ est une base échelonnée de V relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$. L'algorithme du cours nous permet alors de montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{array} \right. .$$

est un système d'équations linéaires de V. Ainsi, $P \cap V$ admet comme systéme d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 0 \\ y + 2z + t & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ y - t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Pour retrouver $P \cap V$, il reste à résoudre ce système ce qui est laissé au lecteur.

5) Nous admetons donc que $\mathbf{R}^4 = P \oplus W$. Ainsi, tout vecteur $u = (x, y, z, t)$ sécrit de façon unique : $u = l + w$ avec $l \in P$ et $w \in W$. La projection p sur W parallélement à P est l'application :

$$p \ : \ \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4 \quad , \quad u \longmapsto p(u) = w \quad .$$

Précisons $p(u) = w$ à l'aide de (x, y, z, t). Il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $w = av_1 + bv_3$. Il en résulte :

$$l = (x, y, z, t) - a(1, 1, 1, 1) - b(1, 1, 0, 0) = (x - a - b, y - a - b, z - a, t - a) \in P \quad .$$

Ainsi les coordonnées de l vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t - 4a - 2b & = & 0 \\ y + 2z + t - 4a - b & = & 0 \end{array} \right. .$$

ou encore

$$\begin{cases} 4a+2b &= x+y+z+t \\ 4a+b &= y+2z+t \end{cases} .$$

Résolvons ce système d'équations linéaires en a, b. La première variable étant a, la deuxième b, le système équivalent suivant est triangulé :

$$\begin{cases} 4a+2b &= x+y+z+t \\ b &= x-z \end{cases} .$$

Il vient :

$$b = x - z \quad , \quad 4a = x+y+z+t-2x+2z = -x+y+3z+t \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{4}(-x+y+3z+t) .$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} p(u) = w &= \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)v_1 + (x-z)v_3 \\ &= \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)(1,1,1,1) + (x-z)(1,1,0,0) \\ &= (\frac{1}{4}(3x+y-z+t), \frac{1}{4}(3x+y-z+t), \frac{1}{4}(-x+y+3z+t), \frac{1}{4}(-x+y+3z+t)) \end{aligned}$$

Remarque : Commme $\dim_{\mathbf{K}} P + \dim_{\mathbf{K}} W = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{R}^4$, le cours nous apprends que pour montrer que P et W sont supplémentaires, il suffit soit de montrer que $P + W = \mathbf{R}^4$, soit de montrer que $P \cap W = \{0\}$. Le plus rapide est alors de montrer que $P + W = \mathbf{R}^4$. Pour ce faire, nous remarquons (analogue à la question 3) $P + W = \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$. Il reste à montrer que $\mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$ est de dimension 4. L'algorithme du cours qui donne une base échelonnée de $\mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_3)$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$ permettra de conclure rapidement.

5 Applications linéaires

5.1 Enoncés

Exercice 37 – Nous considérons l'application linéaire :

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2 \quad , \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4) \quad .$$

1) Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^4$?
2) Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ?
3) Quelle est l'image de f ? L'application f est-elle surjective ?
4) Soit y_1 , y_2 deux réels, préciser un vecteur u de $\mathbf{R}^4$ tel que $f(u) = (y_1, y_2)$.

Exercice 38 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Nous considérons f l'application linéaire de E vers E telle que :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 \ , \ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \ , \ f(e_3) = 4e_1 + e_2 + 4e_3$$

1) Quelle est la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$? Si $u \in E$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$, quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$?
2) Calculer $f(e_1 + 2e_2)$.
3) Déterminer le noyau et l'image de f.
4) Ces sous-espaces vectoriels de E sont-ils supplémentaires ?
5) Quelle est la matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$? En déduire $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$,$f^2(e_3)$.

Exercice 39 – Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Nous considérons f l'application linéaire de E vers E de matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Préciser $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Soit a un réel, déterminer à l'aide de la matrice M le vecteur $f(ae_1 + 17e_2)$.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.
3) Soit $u = 2e_1 - e_2$, $v = e_1 + e_2$. Montrer que (u, v) est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
4) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 40 – Posons $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (1, 3)$.
1) Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$.
2) Quelle est la matrice B de f dans la base (e_1, e_2) ?
3) Si $u \in \mathbf{R}^2$ a pour coordonnées (X_1, X_2) dans la base (e_1, e_2), quelles sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2) ?
4) Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$?

Exercice 41 – Nous considèrons l'application $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \quad .$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ celle de $\mathbf{R}^3$.
1) Quelle est la matrice A de f dans ces bases canoniques ? Préciser $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.
2) Donner une base échelonnée de $\mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
3) En déduire la dimension de l'image de f, la surjectivité de f et la dimension du noyau de f.
4) Déterminer une base du noyau de f.

Exercice 42 – 1) Soit $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (1, 3)$. Exprimer u_1 et u_2 dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
2) Soit f l'application de matrice dans la base (e_1, e_2) : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u_1)$ et $f(u_2)$. Puis, la matrice B de f dans la base (u_1, u_2).
3) Qelles sont les matrices de passage de la base (e_1, e_2) à la base (u_1, u_2) et de la base (u_1, u_2) à la base (e_1, e_2). Quel est le lien entre A et B ?

Exercice 43 – Soit $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $u_1 = (1,4)$ et $u_2 = (1,3)$.
1) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ notée $\mathcal{B}'$.
Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, l'application linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Préciser les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Préciser f^2.
3) Préciser $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4) Préciser les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) ? Retrouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant ces matrices de passage.
5) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont supplémentaires. Comparer f et la symétrie vectorielle s par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallélement à $\mathrm{Vect}(u_2)$.
6) Quelle est la matrice de projection vectorielle p sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallélement à $\mathrm{Vect}(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}'$, dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 44 – Désignons par $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Commencer par préciser les vecteurs e_1 et e_2.
1) Nous considèrons l'application linéaire f de $\mathbf{R}^2$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \quad .$$

Préciser les vecteurs $f(e_1)$,$f(e_2)$,$f(2,5)$,$f(1,3)$.
2) On pose $v_1 = (2,5)$ et $v_2 = (1,3)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$. Quelle est la matrice B de f dans cette base ?
3) Quelle est la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
4) Ecrire la formule reliant A et B. Calculer P^{-1} et vérifier cette formule.
5) Déterminer que imf et kerf.

Exercice 45 – Nous considèrons les applications linéaires :

$$\begin{array}{rcrcl} f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2 & : & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 + 2x_3) \\ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 & : & (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1 + x_2, -x_2, 2x_1 - x_2) \quad . \end{array}$$

1) Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^2$. Puis, déterminer la matrice B de g dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
2) Calculer les matrices AB, BA, $(AB)^2$.
3) Montrer que AB est une matrice inversible. Préciser $(AB)^{-1}$.
4) Expliciter l'application $(f \circ g)^2$.

Exercice 46 – Notons $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Posons $\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2$ et $\epsilon_2 = -e_1 + e_2$.

A1) Expliciter ϵ_1 et ϵ_2. Puis montrer que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
A2) Exprimer le vecteur e_1 (resp. e_2), comme combinaison linéaire des vecteurs ϵ_1, ϵ_2.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, l'application linéaire définie par $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$ et $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$.

A3) Préciser la matrice A de f dans la base (ϵ_1, ϵ_2). Calculer A^2. Que pouvez vous dire de $f \circ f$?
A4) Exprimer le vecteur $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$), comme combinaison linéaire des vecteurs de e_1, e_2. A5) En déduire B la matrice de f dans la base (e_1, e_2). Quelle est la valeur de la matrice B^2 ?

Soit D_1 la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ engendrée par ϵ_1 et D_2 la droite vectorielle de $\mathbf{R}^2$ engendrée par ϵ_2.

B1) Donner une équation de la droite vectorielle D_1 (resp. D_2) de $\mathbf{R}^2$.
B2) Montrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
B3) Soit p la projection sur D_1 parallélement à D_2 et s la symétrie vectorielle sur D_1 parallélement à D_2. Expliciter pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, les deux couples de réels $p(x_1, x_2)$ et $s(x_1, x_2)$.

C1) Comparer f et s.

Exercice 47 – Nous considèrons le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

1) Les variables x_1, x_2, x_3, x_4 sont ordonnés naturellement. Trianguler ce système d'équations à l'aide de l'algorithme de Gauss. Quelles sont les variables libres de ce système ?
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ constitué par les solutions du système $(*)$.
2) Résoudre le système $(*)$ et donner une base de F.
Soit $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (-1,0,1,2), v_3 = (1,2,3,4), v_4 = (-1,1,3,5)$. On désigne par G le sous-espace vectoriel $< v_1, v_2, v_3, v_4 >$ de $\mathbf{R}^4$ engendré par v_1, v_2, v_3, v_4.
3) A l'aide d'un algorithme du cours, donner une base de G échelonnée par rapport à la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbf{R}^4$.
4) Déterminer alors, en suivant par exemple l'algorithme du cours, un système de 2 équations à 4 inconnues dont G est l'ensemble des solutions.
5) Montrer que (v_1, v_2) est une base de G. Préciser l'expression de v_3 et v_4 dans la base (v_1, v_2) de G (nous pourrons utiliser les calculs effectués dans la question 3).

Nous considèrons l'application linéaire f de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

6) Déterminer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ les images par f des vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbf{R}^4$. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$ l'image de f.

7) Soit $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \mathbf{R}^4$, posons $(y_1,y_2,y_3,y_4)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Préciser l'expression de (y_1,y_2,y_3,y_4) à l'aide de (x_1,x_2,x_3,x_4).
8) Déterminer une base de $\ker f$ le noyau de f.
9) Montrer que l'intersection de $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ est réduite au vecteur nul. En déduire que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

5.2 Corrections

Correction de l'exercice 37

1) Ecrivons les éléments de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^2$ en colonne.

Nous avons :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^4$ est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

2) Le noyau de f est par définition constitué des vecteurs $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbf{R}^4$ tels que $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$. Cette équation équivaut à (x_1,x_2,x_3,x_4) est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce système a mêmes solutions que le système triangulé pour l'ordre naturel des variables :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Les variables libres de ce sytème triangulé sont x_3 et x_4. Nous obtenons en le résolvant :

$$\ker f = \{x_3(1,-2,1,0) + x_4(2,-3,0,1) \text{ tels que } x_3\ ,\ x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous avons appliquer l'algorithme de résolution. Nous pouvons donc conclure que $\ker f$ admet pour base le couple de vecteurs de $\mathbf{R}^4$: $(1,-2,1,0),(2,-3,0,1)$. L'espace vectoriel $\ker f$ est donc de dimension 2. Le noyau de f n'est par réduit au vecteur nul de $\mathbf{R}^4$. Donc f n'est pas injective.

3) La formule de dimension, nous apprends :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \quad .$$

Soit, $4 = \dim \operatorname{Im} f + 2$. Ainsi, l'espace vectoriel Imf est de dimension 2. Comme il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ qui est aussi de dimension 2, nous avons : $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}^2$.
L'image de f coïncide avec $\mathbf{R}^2$ l'espace but de f. Donc, f est surjective.

4) De la surjectivité de f, il résulte que pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ tels que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$. Fixons (y_1, y_2); les (x_1, x_2, x_3, x_4) qui conviennent sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = y_2 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ \quad + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = y_2 - y_1 \end{cases} .$$

Les variables libres de ce sytème triangulé sont x_3 et x_4. Ces solutions décrivent l'ensemble :

$$S = \{(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) + x_3(1,-2,1,0) + x_4(2,-3,0,1) \text{ tels que } x_3 \quad x_4 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Nous obtenons, si nous prenons $x_3 = x_4 = 0$, la solution particulière :

$$(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$$

Ainsi, nous avons montré que le quadruplet de réels $(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0)$ vérifie :

$$f(y_2 - y_1, 2y_1 - y_2, 0, 0) = (y_1, y_2) \quad .$$

Correction de l'exercice 38

1) La matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3) est une matrice carrée à trois lignes, ses colonnes sont respectivement les coordonnées de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Cette matrice est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice A donne les les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ces coordonnées sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

2) En particulier les coordonnées de $f(e_1 + 2e_2)$ sont :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(e_1 + 2e_2) = 5e_1 - e_2 + 5e_3$.

3) Considérons un vecteur $u \in E$ et notons (x_1, x_2, x_3) ses coordonées dans la base $\mathcal{B}$: $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Le vecteur u est dans $\ker f$ si et seulement si $f(u) = 0$. Donc, si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ sont nulles, c'est à dire solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

ou encore au système triangulé (l'ordre des variables est l'ordre naturel) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

En résolvant ce système, nous trouvons que ses solutions sont :

$$S = \{x_3(-2,-1,1) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

S sont les coordonnées des vecteurs de $\ker f$ Ainsi :

$$\ker f = \{x_3(-2e_1 - e_2 + e_3) \text{ tels que } x_3 \in \mathbf{R}\} \quad .$$

Le noyau de f est donc un espace vectoriel de dimension 1 de base le vecteur non nul :

$$-2e_1 - e_2 + e_3 \quad .$$

Il résulte de la formule de dimension :

$$3 = \dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f + 1 \quad .$$

Ainsi, l'image de f est un espace vectoriel de dimension 2. D'après le cours, puisque (e_1, e_2, e_3) engendrent E, $\operatorname{Im} f$ est engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Déterminons une base de $\operatorname{Im} f$ echelonnée dans la base (e_1, e_2, e_3).

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(f(e_1), f(e_2)-2f(e_1), f(e_3)-4f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(\, f(e_1), f(e_2)-2f(e_1), f(e_3)-4f(e_1)-(f(e_2)-2f(e_1))\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, Imf admet le couple de vecteurs $(e_1+e_2+e_3, e_2)$ comme base echelonnée relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de E.

Nous retrouvons de plus que $f(-2e_1-e_2+e_3)=0$, c'est à dire que $-2e_1-e_2+e_3 \in \ker f$.

4) Pour toute application linéaire de source E :

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \quad .$$

Comme l'espace but de f est E (f est un endomorphisme), $\operatorname{Im} f$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. Pour démontrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit de montrer que leur intersection est réduite au vecteur nul.

Déterminons un systéme d'équations de $\operatorname{Im} f$ relativement à la base (e_1, e_2, e_3). Considérons un vecteur u de coordonées (x_1, x_2, x_3) dans la base (e_1, e_2, e_3). Considérons la matrice :

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_3, u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Suivons l'algorithme qui donne un système d'équations relativement à la base (e_1, e_2, e_3) de Imf qui est l'espace vectoriel engendré par $(e_1+e_2+e_3, e_2)$:

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_2, u-x_1(e_1+e_2+e_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2-x_1 \\ 1 & 0 & x_3-x_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1+e_2+e_3, e_3, u - x_1(e_1+e_2+e_3) - (x_2-x_1)e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $u \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) vérifient :

$$x_1 - x_3 = 0 \quad .$$

Il est facile maintenant de montrer que $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$. En effet si $u \in \ker f$, il existe un réel a tel que $u = a(-2e_1 - e_2 + e_3)$. Les coordonnées de u dans la base (e_1, e_2, e_3) sont donc $(-2a, -a, a)$. Ce vecteur est dans Imf si et seulement si :

$$-2a - (-a) = 0 \quad .$$

Il vient $a = 0$, donc $u = 0$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

5) La matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ -3 & -3 & -9 \\ 3 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$f^2(e_1) = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 \ , \ f^2(e_2) = 12e_1 - 3e_2 + 12e_3 \ , \ f^2(e_3) = 18e_1 - 9e_2 + 18e_3 \quad .$$

Correction de l'exercice 39

1) La matrice M est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (noter que cela sous-entend que la base de départ est aussi la base d'arrivée). Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la première colonne de M, ainsi $(1, 1)$ sont donc les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$. De même, les coordonnées de

$f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par la deuxième colonne de M et $(2,2)$ sont donc les coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$. Il en résulte :

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = 2e_1 + 2e_2 \quad .$$

Les coordonnées de $ae_1 + 17e_2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(a, 17)$, il en résulte que les coordonnées de $f(ae_1 + 17e_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+34 \\ a+34 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(ae_1 + 17e_2) = (a+34)e_1 + (a+34)e_2 = (a+34)(e_1+e_2) \quad .$$

2) Soit u de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur u est dans $\ker f$ si et seulement si $f(u) = 0$, donc si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ sont nulles :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Cela équivaut au fait que (x_1, x_2) soit solution de l'équation linéaire $x_1 + 2x_2 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\{x_2(-2,1) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\}$. Il en résulte :

$$\ker f = \{x_2(-2e_1 + e_2) \text{ tels que } x_2 \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(-2e_1 + e_2) \quad .$$

Comme $-2e_1 + e_2$ est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et $-2e_1 + e_2$ est une base de $\ker f$.
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im} f$ est engendré par les deux vecteurs $f(e_1), f(e_2)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) \quad .$$

Nous pouvons pour avancer utiliser trois méthodes. L'algorithme du cours qui dit :

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2)$$

$$M_{\mathcal{B}}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2 - 2(e_1 + e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 0) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

Comme $e_1 + e_2$ est non nul, la famille réduite à ce vecteur est libre et $e_1 + e_2$ est une base de $\mathrm{Im} f$. Deuxièmement, nous aurions pu aussi noter que $2e_1 + 2e_2 = 2(e_1 + e_2)$. Il est alors clair que

$$\mathrm{Vect}(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) \quad .$$

Nous terminons alors comme au-dessus.
3) Comme E est de dimension 2, pour montrer que (u, v) est une base de E, il suffit de montrer que la matrice :

$$M_{\mathcal{B}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Son déterminant est non nul, car égal à 3, d'où le résultat. Pour déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u, v)$, donnons deux méthodes :
a) Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont $(2, -1)$, il en résulte que les coordonnées de $f(u)$ dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(u) = 0 = 0u + 0v \quad .$$

De même les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ sont $(1, 1)$, il en résulte que les coordonnées de $f(v)$ dans cette même base sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad f(v) = 3e_1 + 3e_2 = 3(e_1 + e_2) = 3v = 0u + 3v \quad .$$

Par définition de la matrice de f dans la base (u, v), nous obtenons :

$$M(f, (u, v)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

b) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse se déxtermine par le calcul du déterminant et de la comatrice. Nous obtenons :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous savons alors que la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par la formule :

$$B = P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

4) Nous avons toujours : $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$. Pour montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces supplémentaires, il suffit alors de montrer $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. Soit $u \in \operatorname{Im} f$, il existe alors $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u = \lambda(e_1 + e_2)$. Si u appartient de plus à $\ker f$ ses coordonnées (λ, λ) dans la base $\mathcal{B}$ vérifient alors l'équation de $\ker f$. Nous en déduisons : $\lambda + 2\lambda = 0$. D'où $\lambda = 0$ et $u = 0$. Ainsi, $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Correction de l'exercice 40

1) $\mathbf{R}^2$ est de dimension 2. (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

est inversible. C'est le cas puisque son déxterminant est non nul, car ?gal à 1.

2) La matrice de f dans la base (e_1, e_2) est par définition

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Soit (Y_1, Y_2) les coordonnées de $f(u)$ dans la base (e_1, e_2), on a :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ 2X_1 + 2X_2 \end{pmatrix} \quad .$$

4) La matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base (e_1, e_2) est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Son inverse est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$:

$$B = P^{-1}AP \quad ; \quad A = PBP^{-1} \quad .$$

Nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous trouvons $A = B$, pur hasard !

Correction de l'exercice 41

1) Nous observos que :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^4$ et $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Les vecteurs cherchés ont pour coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ les colonnes de la matrice A. Ceux sont donc les colonnes de A.

$$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,2,1)\ ,\ f(e_2) = f(0,1,0,0) = (1,1,-1)$$

$$f(e_3) = f(0,0,1,0) = (1,-1,1)\ ,\ f(e_4) = f(0,0,0,1) = (1,1,-1)$$

2) Appliquons l'algorithme du cours, le point de départ est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons $u'_1 = f(e_1), u'_2 = f(e_2) - f(e_1), u'_3 = f(e_3) - f(e_1), u'_4 = f(e_4) - f(e_1)$, on a :

$$\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \text{ et } A(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Posons $u''_1 = u'_1, u''_2 = u'_2, u''_3 = u'_3 - 3u'_2, u''_4 = u'_4 - u'_2$, on a :

$$\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u'_1, u'_2, u'_3, u'_4) \text{ et } A(u''_1, u''_2, u''_3, u''_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $u''_4 = 0$, on a $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}\,(u''_1, u''_2, u''_3)$. Comme les vecteurs u''_1, u''_2, u''_3 sont échelonnés par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^3$, (u''_1, u''_2, u''_3) est donc une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$.
3) L'image de f n'est autre que $\mathrm{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. Il en résulte que l'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ de dimension 3. Or, $\mathbf{R}^3$ lui même est de dimension 3, donc l'image de f est égal à $\mathbf{R}^3$ et f est surjective. Comme f est une application linéaire de source un espace vectoriel de dimension 4, nous avons :

$$4 = \dim\,(\ker f) + \dim\,(\mathrm{im}\, f)$$

Il en résulte que le noyau de f est de dimension 1. Le noyau de f est donc une droite vectorielle de $\mathbf{R}^4$.
4) L'algorithme donne $u''_4 = 0$, c'est à dire : $u'_4 - u'_2 = 0$, soit :

$$f(e_2) - f(e_1) - (f(e_4) - f(e_1)) = 0$$

Il vient $f(e_2) - f(e_4) = 0$, c'est à dire $f(e_2 - e_4) = 0$. Ainsi, $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$ est un vecteur du noyau de f. Ce vecteur est non nul, c'est donc une famille libre à un élément de $\ker f$. Comme $\ker f$ est de dimension 1, $e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$ est une base de $\ker f$. Nous pouvons vérifier ce résultat en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

dont les solutions sont justement les éléments du noyau de f.

Correction de l'exercice 42
1) Nous avons $u_1 = e_1 + 2e_2$ et $u_2 = e_1 + 3e_2$. La matrice

$$\mathcal{M}_{(e_1,e_2)}(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

qui est inversible, car de déterminant non nul. Il en résulte que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.
2) Les coordonnées de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base (e_1, e_2) sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(u_1) = 0$ et $f(u_2) = e_1 + 3e_2 = u_2$. La matrice B de f dans la base (u_1, u_2) est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Soit P la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (u_1, u_2) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice de passage de la base (u_1, u_2) à la base (e_1, e_2) est la matroce :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Le lien entre A, B et P est :

$$B = P^{-1}AP \quad .$$

Cette identité peut donner une deuxième manière de calculer B.

Correction de l'exercice 43

1) La dimension de $\mathbf{R}^2$ comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel est 2. Pour montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit donc de montrer que la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

est inversible. C'est le cas, puisqu'elle est de déterminant -1.
Autre méthode : vu la dimension de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer que la famille (u_1, u_2) est libre. soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $au_1 + bu_2 = 0$. On obtient :

$$au_1 + bu_2 = a(1, 4) + b(1, 3) = (a + b, 4a + 3b) = (0, 0)$$

Ainsi, (a, b) est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & 0 \\ 4a & + & 3b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Nous en déduisons $a = b = 0$. Cela prouve que (u_1, u_2) est une famille libre, donc une base de $\mathbf{R}^2$.
2) Puisque A est la matrice f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$: $f(e_1) = (-7, -24)$ et $f(e_2) = (2, 7)$. La matrice

de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, f^2 et $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont la même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Ces applications linéaires sont donc égales : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.
3) Les coordonnées de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement?:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $f(u_1) = e_1 + 4e_2 = u_1$ et $f(u_2) = -e_1 - 3e_2 = -u_2$. La matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

4) La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $e_1 = 3u_1 + 4u_2$ et $e_2 = u_1 - u_2$. Nous peuvons retrouver ce résultat en résolvant le système linéaire vectoriel :

$$\begin{cases} e_1 + 4e_2 = u_1 \\ e_1 + 3e_2 = u_2 \end{cases} \quad .$$

Nous obtenons en le résolvant comme un système linéaire à coefficients réels : $e_2 = u_1 - u_2$ et $e_1 = 4u_2 - 3u_1$.
Les coordonnées des vecteurs e_1 et e_2 dans la base (u_1, u_2) sont respectiveement $(-3, 4)$ et $(1, -1)$.
Nous avons :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

5) Comme $\dim \mathbf{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{Vect}(u_1) + \dim \mathrm{Vect}(u_2)$, pour montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont supplémentaires, il suffit de voir que $\mathbf{R}^2 = \mathrm{Vect}(u_1) + \mathrm{Vect}(u_2)$. Cela résulte du fait que (u_1, u_2) est une base de $\mathbf{R}^2$. Par définition de la symétrie s : $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = -u_2$. Ainsi, f et s sont deux applications linéaires qui prennent les mêmes valeurs sur les vecteurs u_1, u_2 d'une base de $\mathbf{R}^2$. Elles sont donc égales : $f = s$ et f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallélement à $\mathrm{Vect}(u_2)$.
6) Par définition de la projection p : $p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = 0$. Ainsi, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

D'autre part :

$$p(e_1) = p(4u_2 - 3u_1) = 4p(u_2) - 3p(u_1) = -3p(u_1) = (-3, -12) \quad ,$$
$$p(e_2) = p(u_1 - u_2) = p(u_1) = (1, 4) \quad .$$

Il en résulte :

$$\mathcal{M}(p, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous pourrions aussi utiliser les matrices de passage pour déduire cette matrice de la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction de l'exercice 44
0) $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.
1) Les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base canonique sont données par la première colonne de A. Ainsi, $f(e_1) = 11e_1 + 30e_2 = (11, 30)$. De même, nous obtenons, $f(e_2) = (-4, -11)$. Le vecteur $(2, 5)$ de $\mathbf{R}^2$ a pour coordonées $(2, 5)$ dans la base canonique. Dans cette base, les coordonnées de $f(2, 5)$ sont donc :

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(2, 5) = (2, 5)$. De même, ls coordonnées de $f(1, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi, $f(1,3) = -(1,3)$.
2) Comme $\mathbf{R}^2$ esr un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, pour montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit a, b deux réels, supposons :

$$av_1 + bv_2 = 0 \quad .$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2a & + & b & = & 0 \\ 5a & + & 3b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Nous en déduisons : $a = b = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2) est bien libre. Comme $f(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$ et $f(v_2) = -v_2 = 0v_1 + (-1)v_2$, la matrice B est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

3) Par définition, cette matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Des équations entre vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2e_1 & + & 5e_2 & = & v_1 \\ e_1 & + & 3e_2 & = & v_2 \end{array} \right. \quad .$$

Nous déduisons : $e_1 = 3v_1 - 5v_2$ et $e_2 = -v_1 + 2v_2$. Il en résulte :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous pourrions calculer P^{-1} en calculant le déterminant et la comatrice de P.
4) La formule est $B = P^{-1}AP$. Le lecteur vérifiera (vraiment) que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

5) Le vecteur u de coordonnées (x_1, x_2) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à kerf si et seulement si les coordonnées de $f(u)$ dans cette base sont nulles, donc si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x_1 - 4x_2 \\ 30x_1 - 11x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 11x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ 30x_1 & - & 11x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 11x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Le couple $(0, 0)$ est la seule solution de ce système. Ainsi, kerf $= \{0\}$ et f est injective. L'application linéaire f est un endomorphisme (linéaire avec même source et même but). Comme elle est injective, le cours nous apprends qu'elle est bijective, donc surjective. Ainsi, imf $= \mathbf{R}^2$.

Correction de l'exercice 45

1) Nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Nous trouvons :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} .$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} .$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = 21\mathrm{Id}_2 \quad .$$

3) Nous déduisons de la dernière égalité :

$$(AB)(\frac{1}{21}AB) = (\frac{1}{21}AB)AB = \frac{1}{21}(AB)^2 = \frac{1}{21}(21\,\mathrm{Id}_2) = \mathrm{Id}_2$$

Donc, la matrice AB est inversible et :

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{21}(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 3/21 \\ 7/21 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

4) $(f \circ g)^2$ a pour matrice $(AB)^2$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Ainsi, $(f \circ g)^2$ et $21\,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont même matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous en déduisons $(f \circ g)^2 = 21\,\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

Correction de l'exercice 46

A1) Nous avons :

$$\epsilon_1 = 3e_1 - 2e_2 = 3(1,0) - 2(0,1) = (3,-2) \quad .$$

De même :

$$\epsilon_2 = -e_1 + e_2 = -(1,0) + (0,1) = (-1,1) \quad .$$

Nous savons qu'une famille libre à deux éléments d'un espace vectoriel de dimension 2 est une base. Ainsi, pour montrer que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbf{R}^2$, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Pour ce faire, soit a, b deux réels tels que $a\epsilon_1 + b\epsilon_2 = 0$; il vient :

$$a(3,-2) + b(-1,1) = (0,0) \quad .$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3a - b & = & 0 \\ -2a + b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ajoutons les deux équations, on obtient : $a = 0$. D'où, $b = 0$. Cela montre que la famille (ϵ_1, ϵ_2) est une famille libre de $\mathbf{R}^2$.

A2) Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ \epsilon_2 & = & -e_1 + e_2 \end{array}\right. .$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ 2\epsilon_2 & = & -2e_1 + 2e_2 \end{array}\right. .$$

Soit en ajoutant : $e_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$.
Nous avons également :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \epsilon_1 & = & 3e_1 - 2e_2 \\ 3\epsilon_2 & = & -3e_1 + 3e_2 \end{array}\right. .$$

Soit en ajoutant : $e_2 = \epsilon_1 + 3\epsilon_2$.

A3) Puisque $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$ et $f(\epsilon_2) = -\epsilon_2$, par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, nous obtenons :

$$A = \mathcal{M}(f, (\epsilon_1, \epsilon_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Nous en déduisons :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 .$$

Il en résulte que f^2 et $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$ ont la même matrice dans la base (ϵ_1, ϵ_2). Ces applications linéaires sont donc égales : $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}$.

A4) Nous avons :

$$f(e_1) = f(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 2f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 2(-e_1 + e_2) = 5e_1 - 4e_2$$

De même :

$$f(e_2) = f(\epsilon_1 + 3\epsilon_2) = f(\epsilon_1) + 3f(\epsilon_2) = \epsilon_1 - 3\epsilon_2 = 3e_1 - 2e_2 - 3(-e_1 + e_2) = 6e_1 - 5e_2$$

A5) Il en résulte :

$$B = \mathcal{M}(f, (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous vérifions que $B^2 = \mathrm{Id}_2$.

B1) L'algorithme du cours montre que $y + \dfrac{3}{2}x = 0$ est une équation de D_1. De même, $y + x = 0$ est une équation de D_2.

B2) Comme la dimension de $\mathbf{R}^2$ est la somme des dimensions de D_1 et D_2, pour démontrer que D_1 et D_2 sont en somme directe, il suffit de montrer que $D_1 \cap D_2 = \{0\}$. Pour ce faire, soit $u = (x, y) \in D_1 \cap D_2$. Comme $u \in D_1$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u = a(3, -2) = (3a, -2a)$. Comme $u \in D_2$: $3a - 2a = 0$. Soit $a = 0$ et $u = 0$. Ainsi :

$$\mathbf{R}^2 = D_1 \oplus D_2 \quad .$$

B3) Ainsi, tout $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ s'écrit de façon unique : $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in D_1$ et $u_2 \in D_2$. Traduisons que $u_1 \in D_1$: il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $u_1 = a(3, -2) = (3a, -2a)$. Il vient $u_2 = (x - 3a, y + 2a)$. Traduisons que $u_2 \in D_2$: il vient $x - 3a + y + 2a = 0$. Soit, $a = x + y$. Ainsi :

$$u_1 = (x + y)(3, -2) = (3x + 3y, -2x - 2y) \quad ; \quad u_2 = (-2x - 3y, 2x + 3y)$$

Par définition de p et s :

$$p(x, y) = u_1 = (3x + 3y, -2x - 2y) \text{ et } s(x, y) = u_1 - u_2 = (5x + 6y, -4x - 5y) \ .$$

C1) La matrice de s dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad .$$

Ainsi f et s ont même matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Nous avons donc $f = s$. Nous aurions pu remarquer aussi que la matrice de s dans la base (ϵ_1, ϵ_2) est la matrice A. Nous conclurions de même que $f = s$.

Correction de l'exercice 47

1) Les différentes étapes de l'algorithme de Gauss sont :

Etape 1 :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Etape 2 :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Ce système est triangulé. Les variables libres sont x_3 et x_4.

2) Le système $(*)$ a mêmes solutions que le système triangulé précédent. Suivons la méthode du cours, les solutions s'expriment à l'aide des variables libres. La dernère équation donne :

$$x_2 = -x_3 - 2x_4 \quad .$$

En remplaçant dans la première équation, nous obtenons :

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 = (-x_3 - 2x_4) - x_3 + x_4 = -2x_3 - x_4 \quad .$$

Ainsi, l'ensemble F des solutions de $(*)$ est :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(-2x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \; ; \; x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \\ & = & \{x_3(-2, -1, 1, 0) + x_4(-1, -2, 0, 1) \; ; \; x_3, x_4 \in \mathbf{R}\} \end{array} \quad .$$

La famille $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$ est une base de F.

3) Partons de la matrice $M(v_1, v_2, v_3, v_4)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs v_i dans la base

canonique de $\mathbf{R}^4$:

$$M(v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $v_2' = v_1 + v_2$, $v_3' = v_3 - v_1$ et $v_4' = v_1 + v_4$:

$$M(v_1, v_2', v_3', v_4') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Nous remarquons que $v_3'' = v_3' - v_2' = 0$ et $v_4'' = v_4' - 2v_2' = 0$. L'algorithme se termine :

$$M(v_1, v_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte que la famille (v_1, v_2') est une base de G. Notons que $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2' = (0,1,2,3)$. Nous observons que $v_3'' = v_4'' = 0$ se traduit par :

$$v_3 - 2v_1 - v_2 = 0 \quad \text{et} \quad v_4 - v_1 + 2v_2 = 0 \quad .$$

4) La famille (v_1, v_2')étant échelonnée, pour obtenir un système d'équations de G, nous considèrons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et la matrice :

$$M(v_1, v_2', x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $x' = x - x_1 v_1$:

$$M(v_1, v_2', x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Posons $x'' = x' - (x_2 - x_1)v_2' = x - x_1 v_1 - (x_2 - x_1)v_2'$:

$$M(v_1, v_2', x'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1) \\ 1 & 3 & x_4 - x_1 - 3(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \quad .$$

Un système d'équations de G est alors :

$$(**) \quad \begin{cases} x_3 - 2x_2 + x_1 - x_4 & = & 0 \\ x_4 + 2x_1 - 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

4) L'espace vectoriel G est de dimension 2, les vecteuts v_1 et v_2 sont dans G pour démontrer que (v_1, v_2) est une base de G, il suffit donc de montrer que (v_1, v_2) est une famile libre. Montrons cela. Soit a, b deux réels tels que $av_1 + bv_2 = 0$. Comme $av_1 + bv_2 = (a - b, a, a + b, a + 2b)$, il vient $a = 0$, puis $b = 0$.
5) Nous pourrons noter que d'après la question précédente :

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad v_4 = v_1 - 2v_2 \quad .$$

6) Les vecteurs $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ sont les colonnes de la matrice A. On constate ainsi que :

$$f(e_1) = v_1 \ , \ f(e_2) = v_2 \ , \ f(e_3) = v_3 \ , \ f(e_4) = v_4 \quad .$$

Comme $\mathrm{Im}\ f$ est l'espace vectoriel engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$, on obtient $\mathrm{Im}\ f = G$. Il résulte alors de la question 4 que (v_1, v_2) est une base de $\mathrm{Im}\ f$.

7) Par définition de A, si $(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 & = & x_1 + 2x_3 + x_4 \\ y_3 & = & x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ y_4 & = & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \end{array} \right. \quad .$$

8) Nous constatons que le noyau de f est constitué des solutions du système $(*)$. D'après la question 2, la famille $\mathcal{B} = ((-2, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1))$ est une base de $\ker f$.
9) L'application f étant linéaire de source $\mathbf{R}^4$, nous savons :

$$\dim \mathbf{R}^4 = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f \quad .$$

Pour démontrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$. Soit $u \in \ker f$, il existe alors deux réels a et b tels que :

$$u = a(-2, -1, 1, 0) + b(-1, -2, 0, 1) = (-2a - b, -a - 2b, a, b) \quad .$$

Si $u \in \mathrm{Im}\, f$, il vérifie les équations de $\mathrm{Im}\, f$ et on a :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2(-a - 2b) + (-2a - b) & = & 0 \\ b + 2(-2a - b) - 3(-a - 2b) & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a + 3b & = & 0 \\ -a + 5b & = & 0 \end{array} \right. \quad .$$

Nous en déduisons $a = b = 0$. Ainsi, $\ker f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ et finalement :

$$\mathbf{R}^4 = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f \quad .$$

6 Matrices Elémentaires

6.1 Enoncés

Exercices Corrigés
Matrices

Exercice 48 – $T_{i,j}(\lambda)$ étant la matrice élémentaire qui correspond à ajouter à la ligne i le produit par λ de la ligne j, préciser la matrice $T_{2,1}(\frac{1}{2})$ de $M_{2,2}(\mathbf{R})$, puis la matrice $T_{1,2}(-2)T_{2,1}(\frac{1}{2})$

Exercice 49 – 1) Préciser les matrices élémentaires de $M_{3,3}(\mathbf{R})$:

$$D_2(-2) \quad , \quad T_{3,2}(3) \quad , \quad T_{2,1}(-2) \quad .$$

2) Calculer la matrice $A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2)$.
3) Donner A^{-1} sous forme de produit de matrices élémentaires. Puis, calculer A^{-1}.

Exercice 50 – Appliquer avec précision aux matrices M et N suivantes l'algorithme du cours qui détermine si une matrice est inversible et donne dans ce cas son inverse :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad et \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}).$$

Exercice 51 – (extrait partiel novembre 2011)
1) En utilisant l'algorithme du cours, montrer que la matrice suivante est inversible et préciser son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Puis, donner une expression de A^{-1} et de A comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 52 – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 53 –) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

Préciser une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 54 – Soit A et B deux matrices carrées de même ordre, on suppose que la matrice AB est inversible d'inverse la matrice C. Montrer alors que B est inversible et préciser A^{-1}.

Exercice 55 – (extrait partiel novembre 2011)
Soit X et Y deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si $XY = 0$, les matrices X et Y ne sont pas inversibles.

Exercice 56 – Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer en appliquant les algorithmes du cours que M est inversible. Préciser la matrice M^{-1} ainsi que la décomposition de M^{-1} comme produit de matrices élementaires.
2) En déduire une décomposition de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Montrer que nous avons aussi $M = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$.
4) En déduire une deuxième expression de M^{-1} comme produit de matrices élémentaires.
5) Calculer $\det(M)$ et retrouver la valeur de M^{-1} en utilisant la formule d'inversion donnée dans le cours.

Exercice 57 – (extrait partiel novembre 2009)
1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

Quelle est la valeur de M^{-1} ?
2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Déduire de la question 1 une matrice X de $M_{3,3}(\mathbf{R})$telle que :

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Exercice 58 – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse M^{-1} de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Donner une expression de M^{-1}, puis de M comme produit de matrices élémentaires.
3) Vérifier le calcul en effectuant les calculs des matrices MM^{-1} et $M^{-1}M$.

Correction de l'exercice 48 :

$$T_{2,1}(\frac{1}{2}) = T_{2,1}(\frac{1}{2})I_2 = T_{2,1}(\frac{1}{2})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

De même, en utilisant les propriétés des actions à gauche par les matrices élémentaires, on obtient :

$$T_{1,2}(-2)T_{2,1}(\frac{1}{2}) = T_{1,2}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

6.2 Corrections

Correction de l'exercice 49 :
1.1)

$$D_2(-2) = D_2(-2)I_3 = D_2(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$T_{3,2}(3) = T_{3,2}(3)I_3 = T_{3,2}(3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

?

$$T_{2,1}(-2) = T_{2,1}(-2)I_3 = T_{2,1}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1.2)

$$A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2) = T_{3,2}(3)D_2(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$A = T_{3,2}(3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

1.3)

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (\,T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2)\,)^{-1} \\
&= T_{2,1}(-2)^{-1}D_2(-2)^{-1}T_{3,2}(3)^{-1} \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))T_{3,2}(-3) \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))T_{3,2}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-(1/2))\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T_{2,1}(2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/2) & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -(1/2) & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 50 :

a) Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2})\ M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2})\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(2)\ M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(2)\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_2 M = M_2$$

$$M_3 = D_1(\frac{1}{2})\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = D_1(\frac{1}{2})\ B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_3 M = M_3$$

$$M_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2})\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad B_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2})\ B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_4 M = M_4 = I_2$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit encore en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(\frac{3}{2}) D_1(\frac{1}{2}) D_2(2) T_{2,1}(-\frac{1}{2}) \quad .$$

b) Les deux lignes de N sont d'ordre 1. Donc, N est ordonnée.

$$N_1 = T_{2,1}(-2)\ N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1 N = N_1$$

La matrice N_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Une ligne de N_1 est constituée de 0. La matrice N n'est donc pas inversible.

Correction de l'exercice 51 :

1) On a :

$$T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ainsi, A est inversible et

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2) On a vu :

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) \quad .$$

Il en résulte :

$$A = (A^{-1})^{-1} = (\ T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)\ )^{-1}$$

Soit :

$$A = T_{2,1}(-3)^{-1}D_2(-1/2)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} = T_{2,1}(3)D_2(-2)T_{1,2}(2) \quad .$$

Correction de l'exercice 52 :

2.1) Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-2)\ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(-1)\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(-1)\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(1)\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad B_3 = T_{1,2}(1)\ B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_3M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

2.2) Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(1)D_2(-1)T_{2,1}(-2) \quad .$$

On sait que l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{i,j}(-\lambda)$ et que pour $a \neq 0$, l'inverse de $D_i(a)$ est $D_i(1/a)$. On rappelle que si A, B et C sont trois matrices carrées de taille n inversibles : $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(1)D_2(-1)T_{2,1}(-2))^{-1} = T_{2,1}(2)D_2(-1)T_{1,2}(-1) \quad .$$

Correction de l'exercice 53 :

Mise en place :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2M = M$$

Les deux lignes de M sont d'ordre 1. Donc, M est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-3/2)\ M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B_1 = T_{2,1}(-3/2)\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_1M = M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La premiére phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de M étant non nuls, on peut conclure que M est inversible.

$$M_2 = D_2(2)D_1(\frac{1}{2})\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = D_2(2)D_1(\frac{1}{2})\ B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_2M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(-1/2)\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = T_{1,2}(-1/2)\ B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_3M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2) \quad .$$

On sait que l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$ est $T_{i,j}(-\lambda)$ et que pour $a \neq 0$, l'inverse de $D_i(a)$ est $D_i(1/a)$. On rappelle que si A et B sont deux matrices carrées de taille n inversibles : $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2))^{-1} = T_{2,1}(3/2)D_1(2)D_2(1/2)T_{1,2}(1/2) \quad .$$

Correction de l'exercice 54 :
Soit n, l'ordre des matrices carrées A, B, C. Par définition : $ABC = BCA = I_n$. Ainsi B admet le matrice CA comme inverse à droite. D'après le cours, si une matrice carrée a un inverse à droite, elle est inversible (c.a.d. admet un inverse à gauche égal à son inverse à droite). Ainsi, B est inversible d'inverse la matrice CA.

De même, A admet le matrice BC comme inverse à gauche. Ainsi (mêmes raisons), A est inversible d'inverse la matrice BC.

Correction de l'exercice 55 :
Si X était inversible, on obtiendrait :

$$X^{-1}(XY) = X^{-1}\,0 = 0 = (X^{-1}X)Y = Y \quad .$$

Ainsi, la matrice Y serait nulle, ce qui est impossible.
Si Y était inversible, on obtiendrait :

$$(XY)Y^{-1} = 0\,Y^{-1} = 0 = X(YY^{-1}) = X \quad .$$

Ainsi, la matrice X serait nulle, ce qui est impossible.
Correction de l'exercice 56 :
1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M$$

Supprimons aux deuxièmes lignes de ces matrices leurs premiéres lignes et supprimons aux troisièmes lignes de ces matrices la moitié des premières ligne :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1$$

Multiplions les premiéres lignes de ces matrices par 1/2 et multiplions les troisièmes lignes par 2, on obtient :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = D_3(2)D_1(1/2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2$$

Supprimons aux premiéres de ces matrices le produit par 1/2 des troisiémes lignes :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = T_{1,3}(-\frac{1}{2})A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_3 M = M_3$$

Supprimons aux premières lignes de ces matrices le produit par 2 de leurs deuxièmes, on obtient :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad , \quad A_A = T_{1,2}(-2)A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_4 M = I_3$$

Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-\frac{1}{2})D_3(2)D_1(\frac{1}{2})T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1) \ .$$

2) On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{2,1}(-1)^{-1}T_{3,1}(-\frac{1}{2})^{-1}D_1(\frac{1}{2})^{-1}D_3(2)^{-1}T_{1,3}(-\frac{1}{2})^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{2,1}(1)T_{3,1}(\frac{1}{2})D_1(2)D_3(\frac{1}{2})T_{1,3}(\frac{1}{2})T_{1,2}(2) \end{aligned}$$

3) Posons $N = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} N &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)I_3 \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

4) Nous en déduisons : $M^{-1} = T_{1,2}(-2)T_{2,1}(-1)T_{3,1}(-1)T_{1,3}(-1)T_{2,3}(-1)$.

5) Un calcul donne $\det M = 2(5-2) - 2(4-2) + (4-5) = 6 - 4 - 1 = 1$.
Ainsi, par la formule donnée à la fin de la sous-section **??** :

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5-2 & -(4-2) & 4-5 \\ -(2-1) & 2-1 & -(2-2)) \\ 4-5 & -(4-4) & 10-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 57 :
1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M \quad .$$

La premiere ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{3,2}(-4)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1 \quad .$$

La matrice M_1 est triangulaire. Multiplions sa première ligne par $-(1/2)$ pour que sa diagonale soit formée de 1 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = D_3(-(1/2))A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2 \quad .$$

La matrice M_2 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en $(0,1,0)$:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = T_{2,3}(-2)A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_3 M = M_3 \quad .$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_3 pour transformer la première ligne en $(1,2,0)$:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = T_{1,3}(-3)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_4 M = M_4 \quad .$$

Utilisons maintenant la deuxième ligne de M_4 pour transformer la première ligne en $(1,0,0)$:

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_5 = T_{1,2}(-2)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_5 M = M_5 = I_5 \quad .$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1} = A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-3)T_{2,3}(-2)D_3(-(1/2))T_{3,2}(-4)\ .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{3,2}(-4)^{-1}D_3(-(1/2))^{-1}T_{2,3}(-2)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{3,2}(4)D_3(-2))T_{2,3}(2)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2) \quad . \end{aligned}$$

3) Multiplions l'équation par M^{-1} à droite. Notre équation équivaut à :

$$X \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} \quad .$$

Cette équation a comme unique solution :

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{2}T_{3,2}(-2)M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -(5/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -(1/4) \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & -(5/4) \end{pmatrix} \quad .$$

Correction de l'exercice 58 :

1) Partons du couple de matrices :

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&3\end{pmatrix}\quad,\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad:\quad I_3M=M$$

La premiere ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_1=T_{3,2}(-2)I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\quad:\quad A_1M=M_1$$

La matrice M_1 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en $(0,1,0)$:

$$M_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_2=T_{2,3}(-1)A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\quad:\quad A_2M=M_2$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_2 pour transformer la première ligne en $(1,2,0)$:

$$M_3=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_3=T_{1,3}(-3)A_2=\begin{pmatrix}1&6&-3\\0&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\quad:\quad A_3M=M_3$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de M_3 pour transformer la première ligne en $(1,0,0)$:

$$M_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad A_4=T_{1,2}(-2)A_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\quad:\quad A_4M=M_4$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-3)T_{2,3}(-1)T_{3,2}(-2) \ .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{3,2}(-2)^{-1}T_{2,3}(-1)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{3,2}(2)T_{2,3}(1)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2) \quad . \end{aligned}$$

3) On en vérifie par des calculs de produits ligne-colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$