# Exercice sur le cours n° 1

**Exercice 1.1** $A = \{-6, -4, -2, 0, 4, 8\}$ $B = \{-4, -3, -1, 0, 1, 4, 8\}$

a) Préciser $A \cup B$, $A \cap B$, $A - A \cap B$.

b) Vérifier les formules de cardinal données dans le cours.

**Solution** : a) $A \cup B = \{-6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 4, 8\}$,

$A \cap B = \{-4, 0, 4, 8\}$,

$A \cap B$ est bien un sous-ensemble de $A$ : $A \cap B \subset A$

$A - A \cap B = \{-6, -2\}$.

b) $\text{card}(A \cup B) = 9$, $\text{card}(A) = 6$, $\text{card}(B) = 7$, $\text{card}(A \cap B) = 4$.

D'après le cours :

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$,

qui correspond bien à : $9 = 6 + 7 - 4$,

$\text{card}(A - (A \cap B)) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$

qui correspond bien à $2 = 6 - 4$.

Exercice 1.2 : Même exercice que 1.1 avec
$A = \{-7, -6, -1, 0, 1, 3, 4\}$, $B = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, 2\}$.

Résultat : on trouvera $A \cup B = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$,
$A \cap B = \{-7; -6\}$, $A - A \cap B = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$.

Exercice 1.3 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = 2x + 3$

a) Quelle est la source de $f$ ? le but de $f$ ?

b) Préciser les images de $0, 1, 2$ par $f$. Préciser les antécédents de $0$, puis de $4$ par $f$

c) Soit $t \in \mathbb{R}$, déterminer les antécédents de $4 + t^2$ par $f$

Solution : a) $\mathbb{R}^+$ est la source de $f$ et $\mathbb{R}$ en est son but.

b) $f(0) = (2 \times 0) + 3 = 3$, $f(1) = (2 \times 1) + 3 = 5$, $f(2) = (2 \times 2) + 3 = 7$.

Les antécédents de $0$ par $f$ sont les $x$ appartenant à la source de $f$ tels que $f(x) = 0$. Soit : $x \in \mathbb{R}^+$ ; $2x + 3 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ ; $x = -\frac{3}{2}$.

Donc $0$ n'a pas d'antécédent par $f$.

Les antécédents de 4 par $f$ sont les $x$ appartenant à la source de $f$ tels que $f(x) = 4$ : $\quad x \in \mathbb{R}^+ \,;\; 2x + 3 = 4$

$\quad : \quad x \in \mathbb{R}^+ \,;\; x = 1/2$

$\quad : \quad x = 1/2$ .

Donc, $\frac{1}{2}$ est le seul antécédent de 4 par $f$.

c) Les antécédents de $4+t^2$ par $f$ sont les $x \in \mathbb{R}^+$ tels que $2x+3 = 4+t^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \,;\; 2x = 1+t^2$

$x \in \mathbb{R}^+ \,;\; x = \dfrac{1+t^2}{2}$

$x = \dfrac{1+t^2}{2}$ .

Donc $\dfrac{1+t^2}{2}$ est le seul antécédent par $f$ de $4+t^2$.

<u>Exercice 1.4</u> Soit $g : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x) = -3x+2$

a) quelle est la source de $g$, le but de $g$

b) Préciser les images de $-2$, de $-4$, de 0 par $g$

c) Quels sont les antécédents de $-1$, puis de 3 par $g$.

Reponse a) source $\mathbb{R}^-$, but $\mathbb{R}$.

b) $g(-2) = 8$, $g(-4) = 14$, $g(0) = 2$.

c) $-1$ n'a pas d'antécédent par $g$ ; $-\frac{1}{3}$ est l'unique antécédent de 3 par $g$.

<u>Exercice 1.5</u> On considère les applications

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x+1}, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 2$$

a) Preciser $g \circ f$.

b) Quelles sont les images par $g \circ f$ de 0, de 1 ?

c) Quels sont les antécédents par $g \circ f$ de 17, puis de 2 ?

<u>Solution :</u> a) $g \circ f$ est bien défini puisque le but de $f$ est égal à la source de $g$.

$$g \circ f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{x+1} + 2$$

$$= \frac{2x+3}{x+1}$$

Ainsi $g \circ f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto g \circ f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ .

b) $g \circ f(0) = 3$ , $g \circ f(1) = \dfrac{5}{2}$ .

c) Les antécédents de 17 par $g \circ f$ sont les $x$ à la source de $g \circ f$ tels que $g \circ f(x) = 17$ :

$$x \neq -1 \ , \quad \frac{2x+3}{x+1} = 17$$

$$x \neq -1 \ , \quad 2x+3 = 17x + 17$$

$$x \neq -1 \ , \quad 15x = -14$$

$$x = -\frac{14}{15}$$

Ainsi $-\dfrac{14}{15}$ est l'unique antécédent par $g \circ f$ de 17

De même les antécédents par $g \circ f$ de 2 sont les

$$x \neq -1 \qquad \frac{2x+3}{x+1} = 2$$

$$x \neq -1 \qquad 2x+3 = 2x+2$$

$$x \neq -1 \qquad 3 = 2$$

Donc 2 n'a pas d'antécédent par $g \circ f$

Exercice 1.6 On considère les applications

$f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

$x \mapsto f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ $\quad x \mapsto g(x) = x+1$

a) préciser $g \circ f$ .

b) quelles sont les images par $g \circ f$ de $0$ et $-1$ .

c) quels sont les antécédents par $g \circ f$ de $17$, $1$ ?

d) $f \circ g$ a t-il un sens ?

Solution : $g \circ f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \mapsto g \circ f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ .

b) $g \circ f(0) = -\dfrac{1}{2}$ , $g \circ f(-1) = 0$ .

c) $\dfrac{35}{16}$ est l'unique antécédent de $17$ par $g \circ f$ ,

$1$ n'a pas d'antécédent par $g \circ f$ .

d) $f \circ g$ n'a pas de sens, car le but de $g$ n'est pas égal à la source de $f$ .