Exercices sur le support 4 (Suite)

dérivées et dérivées partielles

Exercice 1 Calculer les dérivés des fonctions d'une variable

	réponse
$f_1(x) = \frac{1}{3}x^5 - 4x^2 + 2x + 1$	$f_1'(x) = \frac{5}{3}x^4 - 8x + 2$
$f_2(x) = (\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1)\, e^x$	$f_2'(x) = (\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3)\, e^x$
$f_3(x) = \dfrac{2x+4}{x+3}$	$f_3'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$
$f_4(x) = \dfrac{x^2+x}{2x+3}$	$f_4'(x) = \dfrac{2x^2+6x+3}{(2x+3)^2}$

<u>Exercice 2</u> Calculer de même les dérivées des fonctions suivantes

$$a(x) = \sqrt{2x^2+x+3} \qquad\qquad b(x) = \ln(x^4+x^2+1)$$

<u>Solution :</u> On va utiliser la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables :

$$(g\circ f)'(x) = f'(x) \quad g'(f(x))$$

On remarque que $a = g\circ f$ où g est définie par $g(x) = \sqrt{x}$ et f par $f(x) = 2x^2+x+3$. Comme $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(x) = 4x+1$ on obtient :

$$a'(x) = (4x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2+x+3}} = \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+3}}$$

De même $b = g\circ f$, où g est définie par $g(x) = \ln x$ et f par $f(x) = x^4+x^2+1$. Comme $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = 4x^3+2x$

On obtient :

$$b'(x) = \frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}.$$

Exercice 3 Calculer les dérivées partielles des fonctions polynomiales 2 variables x_1 et x_2 définies par

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{5} x_1^{10} x_2^5 - x_1 x_2^7 + \frac{1}{2} x_1^4 + 2x_2^2 + 1$$

$$f_2(x_1, x_2) = 5x_2^4 + x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + 4$$

$$f_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + 17$$

Reponse :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1^9 x_2^5 - x_2^7 + 2x_1^3$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1^{10} x_2^4 - 7x_1 x_2^6 + 4x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1 x_2 + 3x_2^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 20x_2^3 - 2x_1^2 + 6x_1 x_2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_1 - 4x_2 + 2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -4x_1 + 6x_2 - 3$$

de même, on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{-16x_1 - 14}{(3x_1 + 2x_2 + 3)^2}$

<u>Solution de b)</u>

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(2x_1^2 - 3x_2^2)(2x_1 + x_2) - (x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2)\,4x_1}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

$$= \frac{4x_1^3 - 6x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2 - 3x_2^3 - 4x_1^3 + 4x_1x_2^2 - 4x_1^2x_2}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

$$= \frac{-2x_1x_2^2 - 2x_1^2x_2 - 3x_2^3}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(2x_1^2 - 3x_2^2)(-2x_2 + x_1) - (x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2)(-6x_2)}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

$$= \frac{-4x_1^2x_2 + 6x_2^3 + 2x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 6x_1^2x_2 - 6x_2^3 + 6x_1x_2^2}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

$$= \frac{2x_1^2x_2 + 2x_1^3 + 3x_1x_2^2}{(2x_1^2 - 3x_2^2)^2}$$

Exercice 4 : Calculer les dérivées partielles de fonctions rationelles de plusieurs variables

a) $$f(x_1, x_2) = \frac{2x_1 - 4x_2 + 1}{3x_1 + 2x_2 + 3}$$

b) $$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2}{2x_1^2 - 3x_2^2}$$

Solution de a : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, on dérive f par rapport à x_1 :

$$f(x_1, x_2) = \frac{u(x_1, x_2)}{v(x_1, x_2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{v(x_1, x_2)\,\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, u(x_1, x_2)}{v(x_1, x_2)^2}$$

On obtient : $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(3x_1 + 2x_2 + 3) \times 2 - 3(2x_1 - 4x_2 + 1)}{(3x_1 + 2x_2 + 3)^2}$$

$$= \frac{16x_2 + 3}{(3x_1 + 2x_2 + 3)^2}$$

<u>Exercice 5</u> Calculer les dérivées partielles de la fonction h de 3 variables x_1, x_2, λ définie par :

$$h(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \lambda(3x_1 - 2x_2 + 1)$$

<u>réponse</u> :

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + x_2 + 3\lambda$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - 2\lambda$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 - 2x_2 + 1$$

<u>Exercice 6</u> : Calculer les dérivées partielles des fonctions de 2 variables x_1, x_2 ;

a) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_1^3 x_2^4 + x_2}$, b) $v(x_1, x_2) = e^{\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}}$

<u>Solution de a</u> Dérivons u par rapport à x_1 ("la variable x_2 est considérée comme une constante"). Il s'agit de dériver la composée de deux fonctions d'une variable $g \circ f(x_1)$ où $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x_1) = x_1^2 + x_1^3 x_2^4 + x_2$

Comme $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f'(x_1) = 2x_1 + 3x_1^2 x_2^4$

On obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1 + 3x_1^2 x_2^4}{2\sqrt{x_1^2 + x_1^3 x_2^4 + x_2}}$$

De même $\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{4x_1^3 x_2^3 + 1}{2\sqrt{x_1^2 + x_1^3 x_2^4 + x_2}}$

<u>Solution de b</u> On rappelle que $(e^x)' = e^x$. On obtient après calculs :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right) = \frac{-2x_2}{(x_1 - x_2)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}\right) = \frac{2x_1}{(x_1 - x_2)^2}$$

Il en résulte suivant le même principe qu'en a (dérivée de fonctions continues) :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{-2x_2}{(x_1 - x_2)^2} e^{\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}} \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{(x_1 - x_2)^2} e^{\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}}.$$