II L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels

1) Définition et représentation :

En économie par exemple, on est amené à considérer simultanément plusieurs valeurs numériques. On peut penser aux 40 valeurs des actions du CAC 40 qui est le principal indice boursier de la bourse de Paris. On comprends ainsi l'intérêt de la définition suivante :

Définition : Soit n un entier, on note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble dont les éléments sont les n-uplets de réels. Un élément de $\mathbb{R}^n$ est la donnée de n réels $x_1, x_2, \dots, x_n$. Cet élément est noté $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Définition On peut distinguer deux opérations naturelles sur $\mathbb{R}^n$:
addition : soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

multiplication par un réel : Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

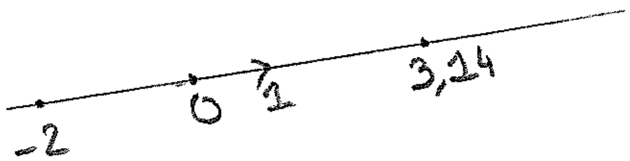
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

<u>Cas particulier $n = 1$</u> $\mathbb{R}^1$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

Si $\mathcal{D}$ est une droite muni d'un repère l'application :

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}$ $\quad x \mapsto$ le point M de coordonnée x

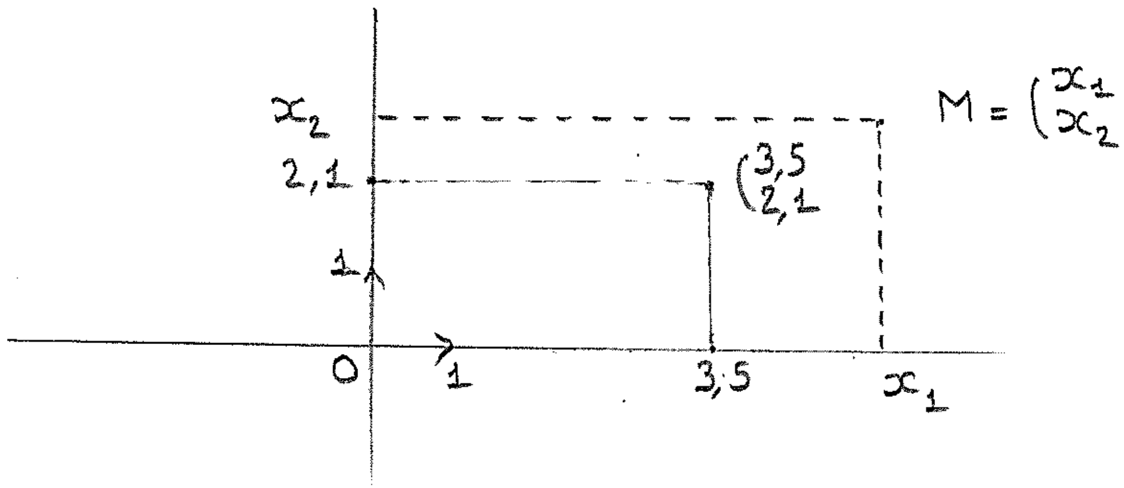
est une bijection. Elle identifie $\mathbb{R}$ à la droite $\mathcal{D}$.



<u>Cas particulier $n = 2$</u> $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Si $\mathcal{P}$ est un plan muni d'un repère l'application :

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto$ le point M de coordonnées (x_1, x_2)

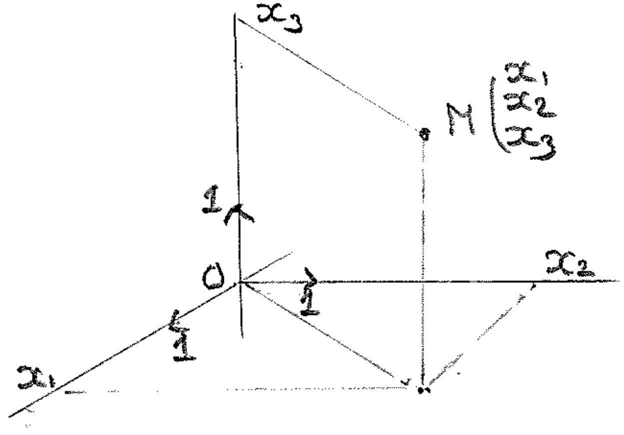
est une bijection. Elle identifie $\mathbb{R}^2$ au plan $\mathcal{P}$.



<u>Cas particulier $n = 3$:</u> $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels. Si $\mathcal{E}$ est l'espace muni d'un repère, l'application :

$$\mathbb{R}^3 \to \mathcal{E} \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \text{le point } M \text{ de coordonnée } (x_1, x_2, x_3)$$

est une bijection. Elle identifie $\mathbb{R}^3$ et l'espace $\mathcal{E}$.

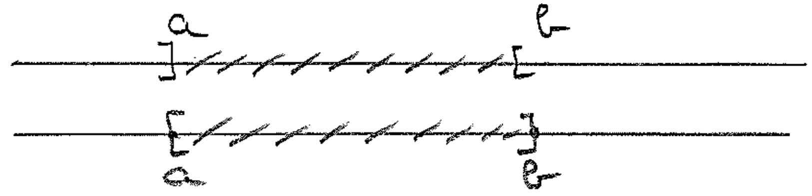


2) Quelques exemples de sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

<u>$n = 1$</u> : Nous associons à $a < b$ deux réels différents intervalles :

$]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } a < x < b \}$

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b \}$



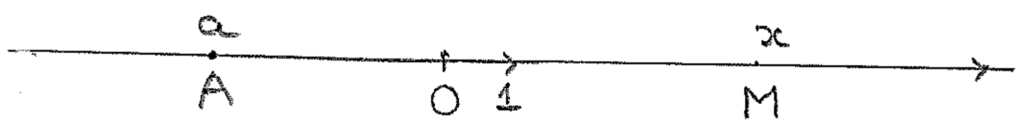
On peut considérer d'autres intervalles comme

$]a, \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x > a \}$

$[a, \infty[= \{ x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x \geqslant a \}$ ...

Rappelons que la valeur absolue d'un réel x est le réel noté $|x|$ défini par $|x| = x$ si $x \geqslant 0$ et $|x| = -x$ sinon.

<u>Interprétation géométrique de la valeur absolue</u> : Soit $\mathcal{D}$ une droite muni d'un repère. Associons au réel x le point M d'abscisse x et au réel a le point A d'abscisse a.



Alors $|x|$ est la distance de M à l'origine de O du repère
$|x-a|$ est la distance de M à A

Notons que si ε est un réel strictement positif :

$\{x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| < \varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

$\{x \in \mathbb{R}$ tels que $|x-a| \leqslant \varepsilon\} = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$\underline{n=2}$ Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère. A tout couple (x_1, x_2) de réels correspond le point M du plan de coordonnées (x_1, x_2). On cherche ici à donner la représentation géométrique de sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ caractérisé par certaines équations

<u>Rappels</u> : Soit B l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $y = \frac{1}{2}x + 1$

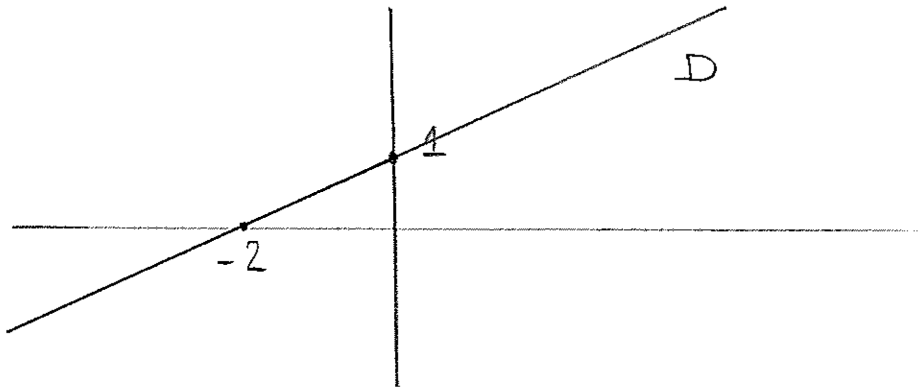
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = \frac{1}{2}x + 1\}$

Nous savons que la représentation géométrique de B est une droite

$1 = \frac{1}{2}\, 0 + 1$ donc $(0,1) \in B$

$0 = \frac{1}{2}(-2) + 1$ donc $(-2,0) \in B$

Ainsi, la représentation géométrique de B est la droite D passant par les points de coordonnées $(0,1)$ et $(-2,0)$

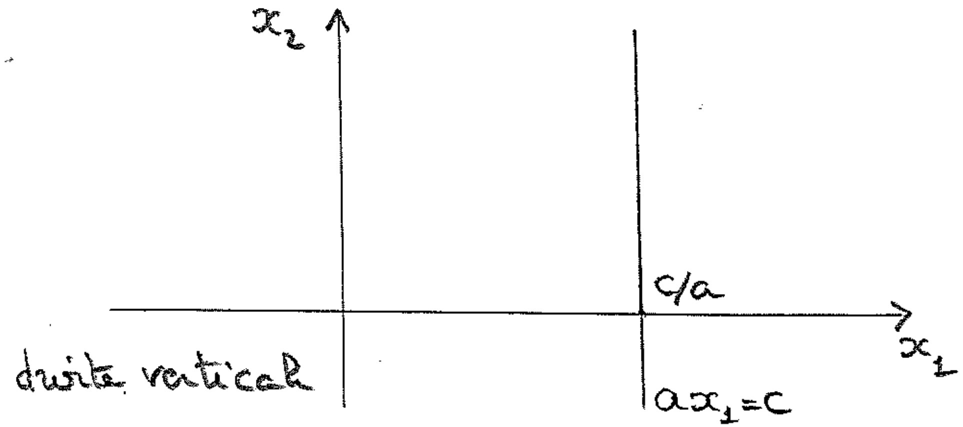


On dit que D est la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x + 1$

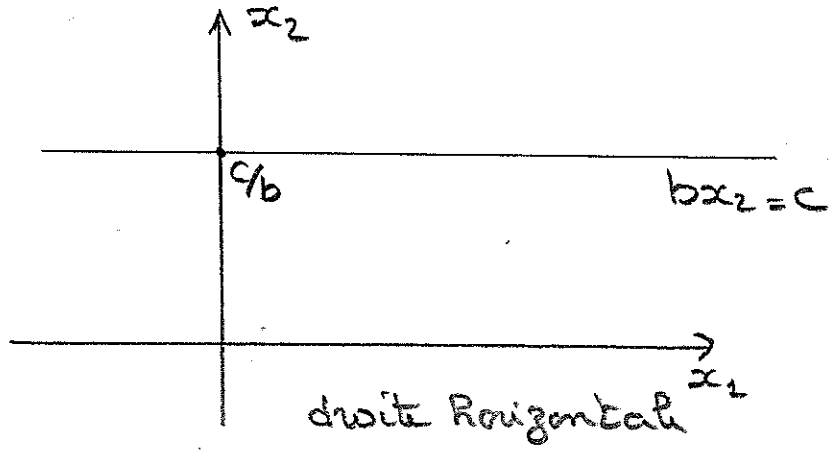
<u>Proposition</u> : Fixons a, b, c trois réels tels que a et b ne soient pas simultanément nuls. Alors la représentation géométrique du sous-ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 = c\} \subset \mathbb{R}^2$ est une droite, dite droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$

Détaillons suivant les valeurs de a, b, c la représentation de cette droite :

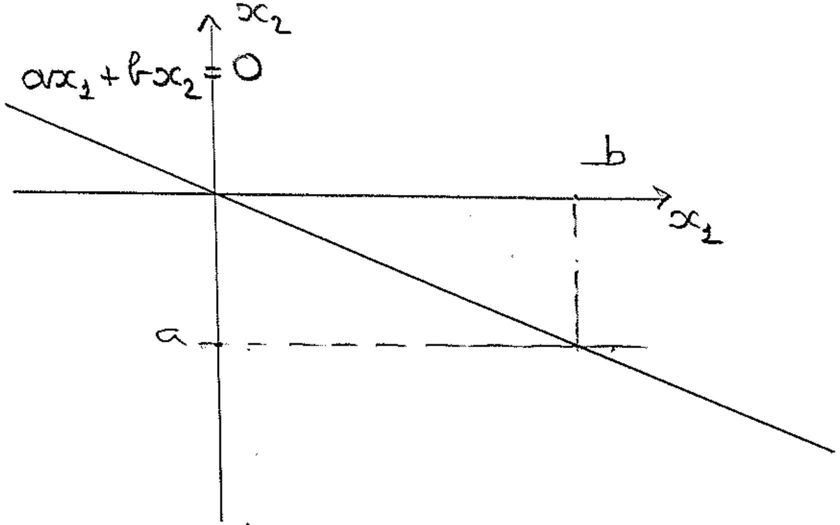
$b = 0$, droite d'équation $ax_1 = c$



$a = 0$, droite d'équation $bx_2 = c$

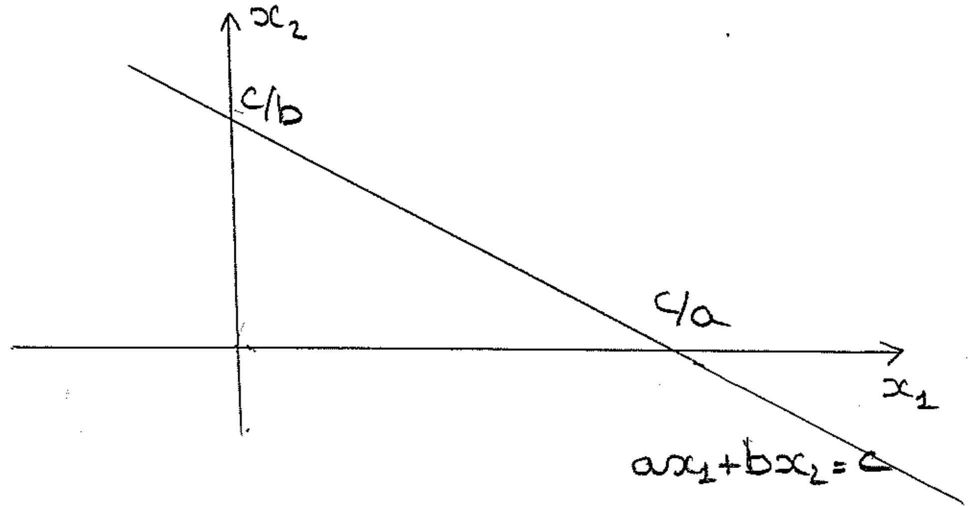


$c = 0$, droite d'équation $ax_1 + bx_2 = 0$



Cette droite passe par l'origine et le point de coordonnées $(-b, a)$

cas a, b, c non nuls



Cette droite passe par les points de coordonnées $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

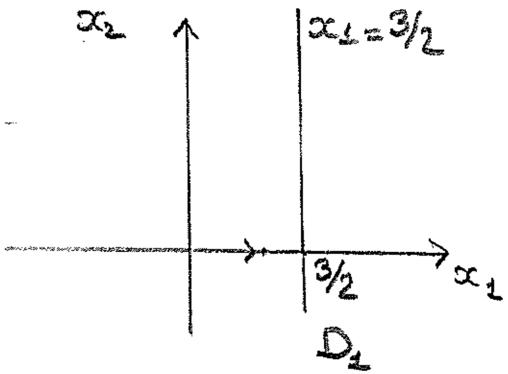
Exemples : Représenter géométriquement

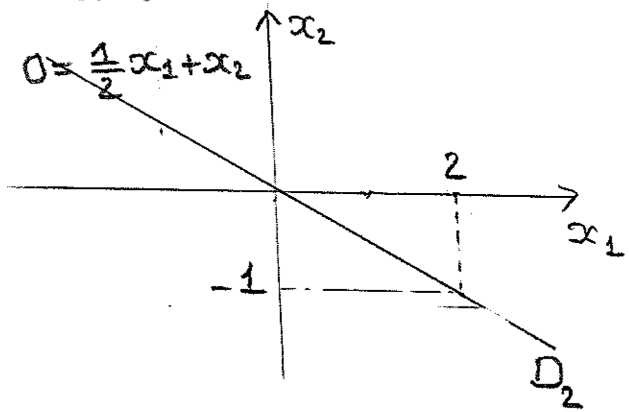
a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $2x_1 = 3\} = A_1 \subset \mathbb{R}^2$

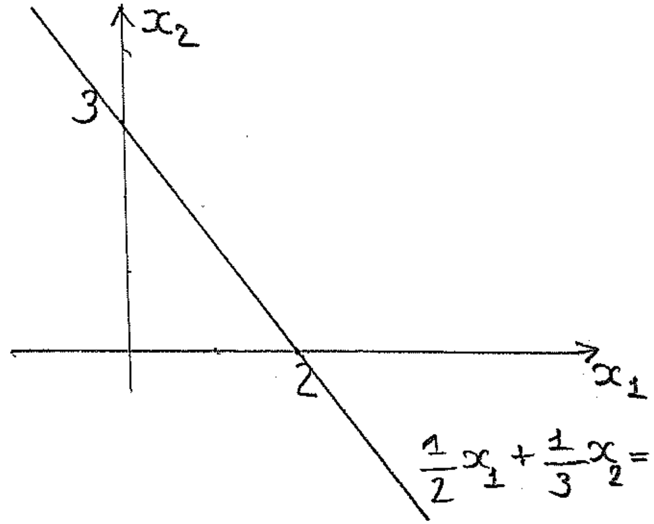
b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0\} = A_2 \subset \mathbb{R}^2$

c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1\} = A_3 \subset \mathbb{R}^2$

Les représentations géométriques de A1, A2, A3 sont respectivement des droites D_1, D_2, D_3. Nous avons

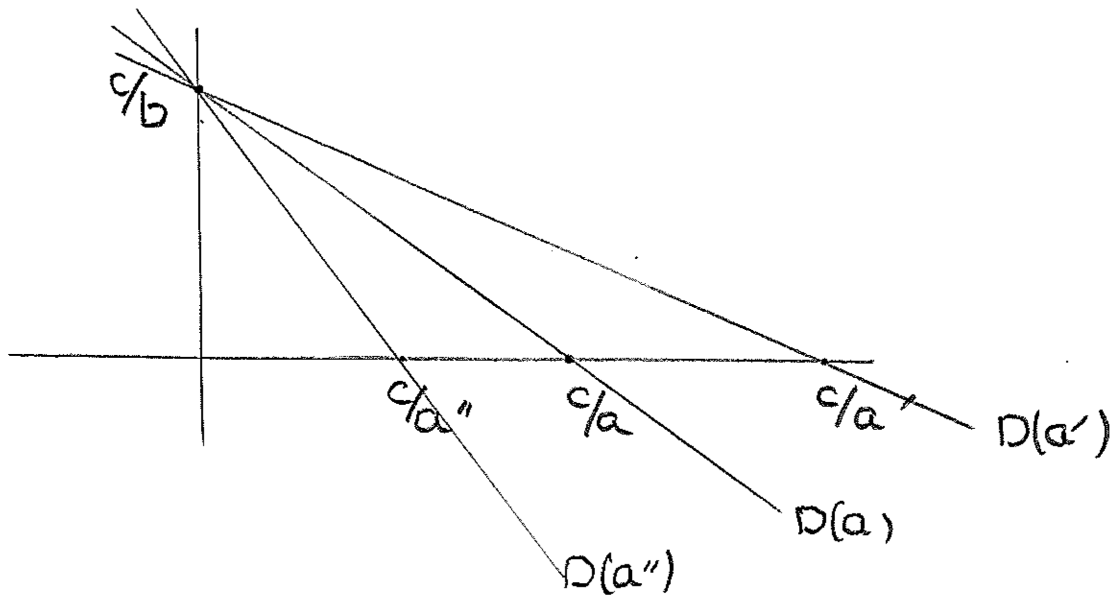




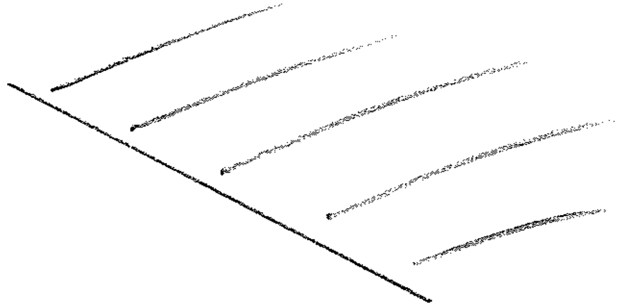


Remarques : Quand c varie, les droites d'équations $ax_1 + bx_2 = c$ sont parallèles. Plus généralement, les droites d'équations $ax_1 + bx_2 = c$ et $a'x_1 + b'x_2 = c'$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$

<u>Exemple de variation des coefficients :</u> Fixons $b > 0$, $c > 0$ deux réels. Soit $a > 0$, notons $D(a)$ la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$. On peut noter que toutes les droites $D(a)$ passent par le point de coordonnées $\left(0, \frac{c}{b}\right)$. D'autre part la droite $D(a)$ passe par le point de coordonnées $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$. Ainsi si $0 < a' < a < a''$, la position relative des droites $D(a')$, $D(a)$, $D(a'')$ est donnée par le dessin :



Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique. Une droite D du plan délimite $\mathcal{P}$ en deux demi-plans "ensemble des points strictement du même coté de D"



D

E demi-plan délimité par D

<u>Proposition :</u> Soit a, b deux réels non simultanément nuls et c réel.

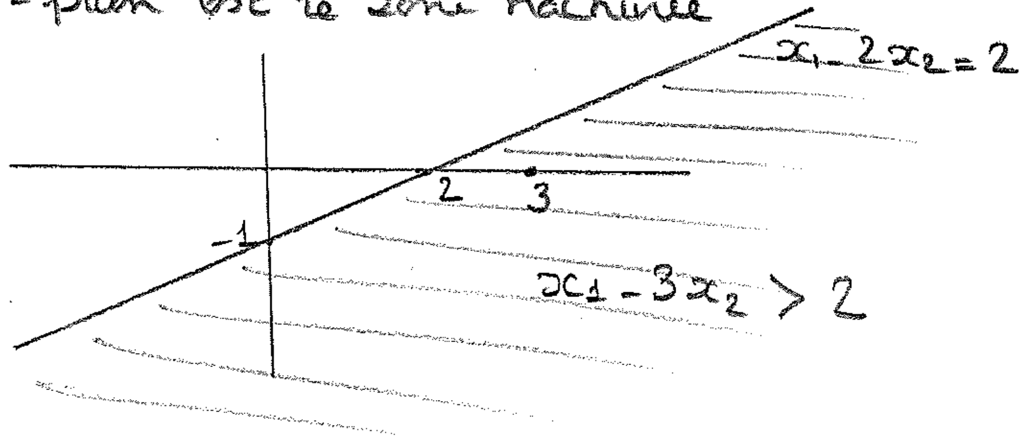
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } ax_1 + bx_2 > c\} \subset \mathbb{R}^2$

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } ax_1 + bx_2 < c\} \subset \mathbb{R}^2$

sont représentés géométriquement par les demi-plans constitué des points strictement du même coté de la droite D d'équation $ax_1 + bx_2 = c$
Ils sont appelés respectivement demi-plan d'équation $ax_1 + bx_2 > c$ et d'équation $ax_1 + bx_2 < c$.

<u>Exercice</u> : Représenter géométriquement : $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - 2x_2 > 2\}$

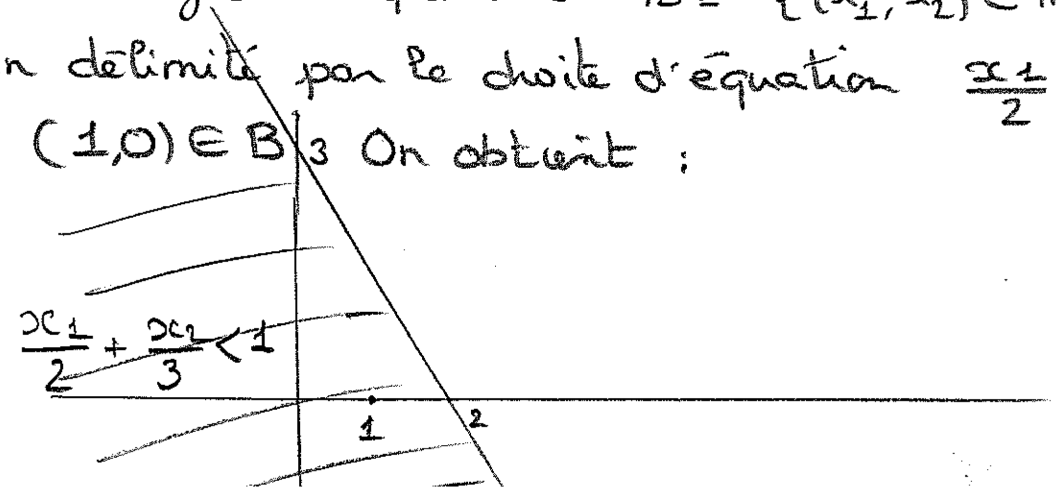
Il s'agit d'un demi-plan délimité par la droite D d'équation $x_1 - 2x_2 = 2$. La droite D passe par les points de coordonnées $(2,0)$ et $(0,-1)$. Enfin $(3,0) \in A$ car $3 - 2\times 0 > 2$. Ainsi le point de coordonnée $(3,0)$ est dans le demi-plan représentant A. Ainsi ce demi-plan est la zone hachurée



<u>Exercice</u> : Représenter géométriquement $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} < 1\}$

C'est un demi-plan délimité par la droite d'équation $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 1$.

On remarque que $(1,0) \in B$. On obtient :



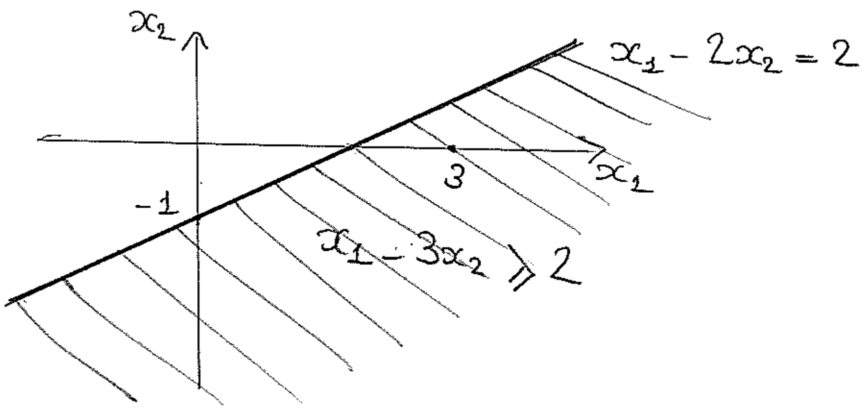
Remarque Soit a, b deux réels non strictement nuls et c un réel.

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 \geqslant c\} \subset \mathbb{R}^2$

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax_1 + bx_2 \leqslant c\} \subset \mathbb{R}^2$

sont représentés géométriquement par la réunion des demi-plans constitués des points strictement du même coté de la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$ et de la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$

Exemple $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - 2x_2 \geqslant 2\}$

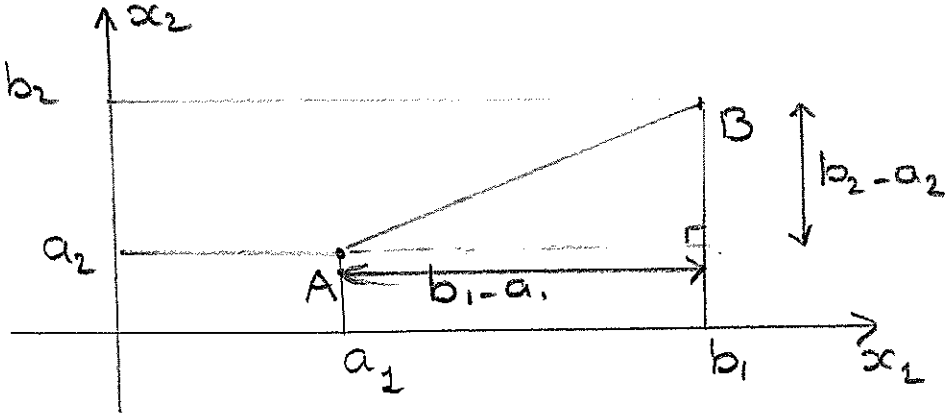


<u>Définition :</u> Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, le réel positif $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ noté $d(a,b)$ est appelé distance de a à b.

Soit $\mathcal{P}$ un plan géométrique muni d'un repère orthonormé, A le point de coordonnée (a_1, a_2) et B le point de coordonnée (b_1, b_2).

Alors $d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ est la distance de A à B.

Autrement dit : $d(a,b) = AB$ longueur du segment AB.



Proposition : Soit $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ et $R>0$ un réel.

La représentation géométrique du sous-ensemble :

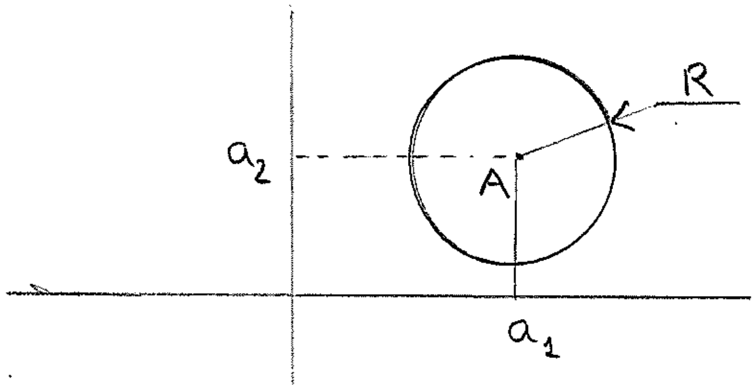
$$C(a,R)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}=R\}\subset\mathbb{R}^2$$

est le cercle de centre A et de rayon R où A est le point de coordonnée (a_1,a_2).

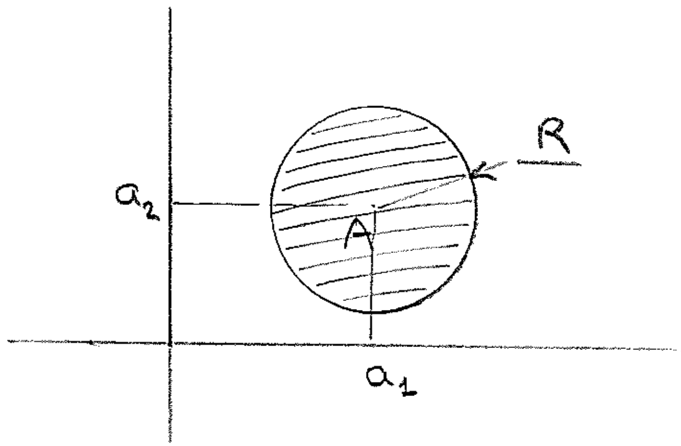
La représentation géométrique du sous-ensemble :

$$B(a,R)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<R\}\subset\mathbb{R}^2$$

est le disque de centre A et de rayon R : ensemble des points du plan à une distance strictement inférieure à R de A.



cercle de centre A de rayon R :
$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<R^2$



disque de centre A de rayon R :
$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<R^2$

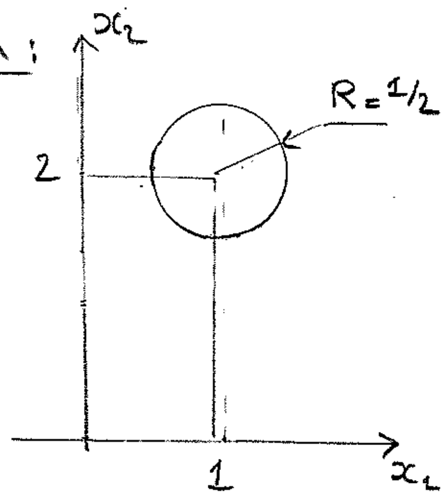
Exercice : Représenter géométriquement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

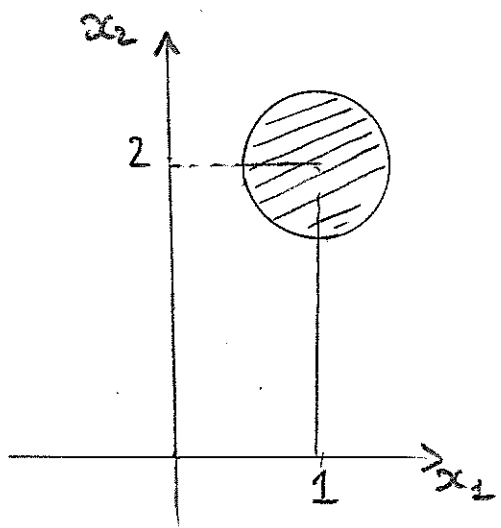
$B_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2} = 1/2\}$,

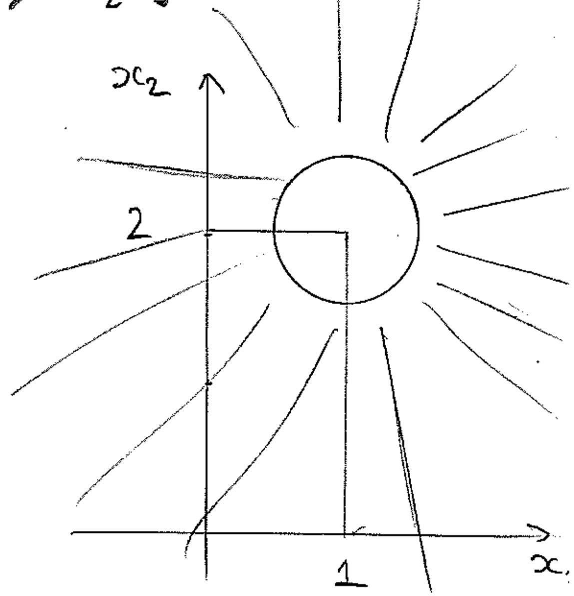
$B_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2} < 1/2\}$,

$B_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2} > 1/2\}$.

Solution :







B_1 correspond au cercle de centre $(1, 2)$ de rayon $\frac{1}{2}$:

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 = \frac{1}{4}$$

B_2 correspond au disque de centre $(1,2)$ de rayon $1/2$:

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 < \frac{1}{4}$$

B_3 correspond aux points distants de $A = (1,2)$ d'une distance $> \frac{1}{2}$:

$$(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 > \frac{1}{4}$$

3) Distance entre deux n-uplets de réels

<u>Définition :</u> $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad y = (y_1, y_2, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$

On appelle distance de x à y le réel positif :

$$d(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

On remarque que pour tout $i \in \{1, 2, .., n\}$: $|y_i - x_i| \leq d(x,y)$.
Ainsi le réel $d(x,y)$ est petit, chaque $|y_i - x_i|$ est petit. Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, .., n\}$: y_i est proche de x_i

<u>Définition :</u> Soit $a = (a_1, a_2, .., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ un réel
$B(a, R) = \{x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(a, x) < R\} \subset \mathbb{R}^n$
est appelé la boule de centre a et de rayon R

$B(a, R)$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ dont la distance à a est strictement inférieur à R. Cela explique cette terminologie : boule de centre a et de rayon R

<u>Pour $n=1$:</u> $a = a_1$, $B(a,R) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \sqrt{(x-a)^2} < R\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \quad — \quad |x-a| < R\}$

$=]a-R, a+R[$

<u>Pour $n=2$:</u> $a = (a_1, a_2)$ la représentation de $B(a,R)$ est la boule de centre le point de coordonnée (a_1, a_2) de rayon R

<u>Exercice :</u> $n=4$ $a = (1,2,1,2) \in \mathbb{R}^4$ $b = \left(1+\frac{1}{1000}, 2+\frac{1}{1000}, 1+\frac{1}{1000}, 2+\frac{1}{1000}\right)$

Calculer $d(a,b)$:

$$d(a,b) = \sqrt{\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{1000}\right)^2+\left(\frac{1}{1000}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{(1000)^2}} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$$

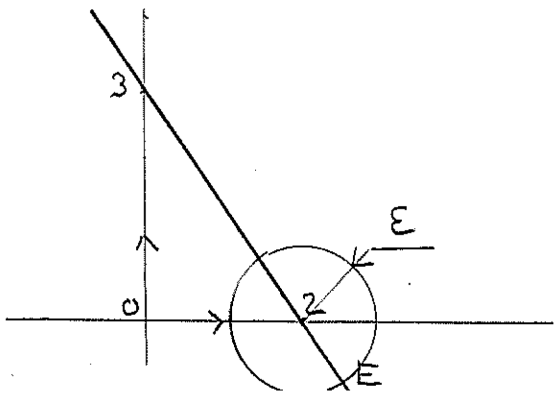
4) Ensembles ouverts, fermés et bornés de $\mathbb{R}^n$

Définition : (Ouverts) Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in U$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Définition : (Fermés) Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si $\mathbb{R}^n - F$ le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition : (Bornés) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est borné si A est contenu dans une boule $B(a, R)$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Soit $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1\}$



$(2,0) \in E$

Or toute boule de centre $(2,0)$ et de rayon $\varepsilon > 0$ n'est pas contenue dans E

Ainsi, E n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$

En fait, si $x = (x_1, x_2)$ est un point quelconque de E. Toute boule de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ n'est pas contenu dans E

E est fermé. En effet le complémentaire de E géométriquement est le plan privé de la droite d'équation $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1$

Si $x = (x_1, x_2)$ n'appartient pas E, il est clair qu'un disque de centre x et de rayon assez petit ne rencontre pas E. Il est donc contenu dans son complementaire

E n'est pas borné : On ne peut enfermer une droite dans un disque.

Proposition : L'intersection ou la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. De même, l'intersection ou la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.