III. 4 Fonctions numériques continues

a) Rappels pour les fonctions numériques d'une variable

Définition (continuité) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (autrement dit si $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ quand x est proche de x_0). On dit que f est continue si f est continue en tout point.

Exemple : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = 17x^3 + 4x^2 - 1$ est continue
En particulier $f(x)$ est proche de $f(1) = 20$ si x est proche de 1

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto E(x) = n$ où n est l'entier vérifiant
$$n \leq x < n+1 .$$

La fonction $E(x)$ n'est pas continue en $x = 1$ (par exemple), car $f(1) = 1$ et $0 = f(1-\varepsilon) \neq f(1) = 1$ pour ε petit
La fonction $E(x)$ s'appelle la partie entière.

<u>Proposition :</u> Les fonctions numériques d'une variable qui sont dérivables sont continues

<u>Idée de la preuve :</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x)$. On suppose f dérivable en x_0, c'est à dire $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ proche de $f'(x_0)$ quand x est proche de x_0. Ainsi, $f(x) - f(x_0)$ est voisin de $f'(x_0)(x - x_0)$, donc voisin de 0 quand x est proche de x_0. On a donc $f(x)$ proche de $f(x_0)$ quand x est proche de x_0.

<u>b) Cas des fonctions numériques de plusieurs variables</u>

<u>Définition :</u> $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ $a \in A$

$$x = (x_1, x_2, .., x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, .., x_n) .$$

On dit que f est continue en $a = (a_1, a_2, .., a_n)$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (autrement dit si $f(x)$ est proche de $f(a)$ quand x appartient à A et est proche de a. On dit que f est continue si f est continue en tout point de A

<u>Proposition :</u> Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons f et g continues en a. Alors, les fonctions numériques $f+g$, λf, fg sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction numérique $\frac{f}{g}$ est continue en a.

<u>Proposition :</u> (Exemple de fonctions numériques) Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Les fonctions rationnelles de n variables sont continues sur leurs ensembles de définition

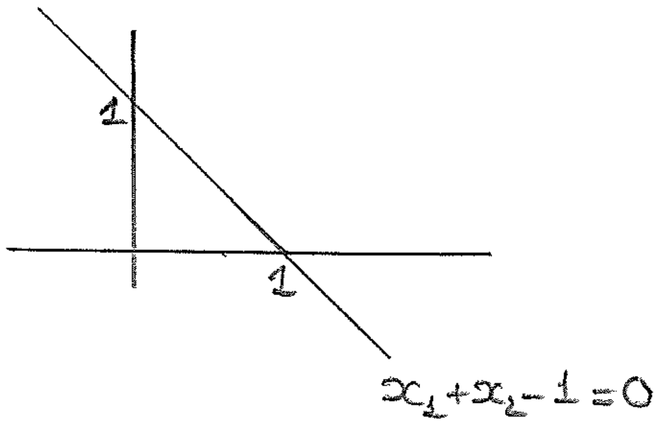
<u>Exemple :</u> $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = 17x_1^2 x_2 - 5x_2^2 + 2$

f est une fonction polynomiale de 2 variables. Ainsi par exemple on peut dire que si (x_1, x_2) est proche de $(0, 1)$, le réel $f(x_1, x_2)$ est proche de $f(0,1) = -3$.

<u>Exemple :</u> $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 1}{x_1 + x_2 - 1}$

C'est une fonction rationelle de 2 variables. Soit $\mathcal{D}_g$ son domaine de définition

$$\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x_1 + x_2 - 1 \neq 0\}$$



La propositit dit que g fonction rationelle est continue en tout point de $\mathcal{D}_g$. Cela signifie par exemple puisque $(0,0) \in \mathcal{D}_g$ que $g(x_1, x_2)$ est proche de $g(0,0) = -1$ si (x_1, x_2) est proche de $(0,0)$.

<u>Proposition :</u> La composée de fonctions continues est continue

<u>Exemple :</u> $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = e^{(x_1^2 + x_2^2)}$

est continue. La fonction est la composée $g \circ f$ des fonctions numériques continues :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x) = e^x$$

Définition : (restriction d'une fonction numérique

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction numérique
Soit $B \subset A$. On appelle restriction de f à B et on note $f_{|B}$
la fonction $f_{|B} : B \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f_{|B}(x) = f(x)$

Proposition : La restriction d'une fonction continue est continue

En particulier, la restriction à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ d'une fonction polynomiale de n variables est continue

Exemple $\quad B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 - 1 = 0\}$

$g : B \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 x_2^3 + x_1^2 + 2$

est continue comme restriction d'une fonction polynomiale.

<u>Proposition</u> : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction numerique continue de n variables. Pour tout réel c :

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) > c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ — $f(x_1, .., x_n) < c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ — $f(x_1, .., x_n) \neq c\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

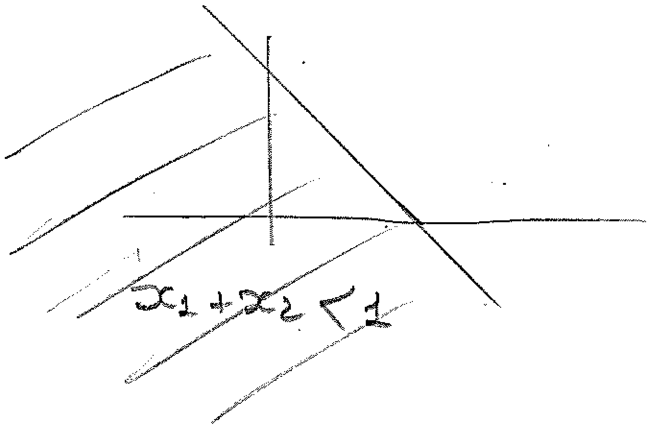
Par contre,

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) \geq c\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) \leq c\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) = c\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$

<u>Exemple</u> : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.



On applique la proposition avec f fonction polynomial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ et $c = 1$.

Remarques : On peut noter qu'une fonction numérique de plusieurs variables peut admettre des dérivées partielles sans être continue. L'exemple est donnée par la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

explication :

Comme $x_1 \to f(x_1, 0)$ et $x_2 \to f(0, x_2)$ sont les fonctions nulles f admet des dérivées partielles par rappart à x_1 et x_2 en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$$

Maintenant f n'est pas continue en $(0,0)$ car $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ est proche de $(0,0)$ pour n grand, mais $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ n'est pas proche de $f(0,0) = 0$.