On considère la fonction

$$\begin{cases} f \; : & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ & (x_1, x_2) \mapsto -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 3x_1 + 4x_2 + 19. \end{cases}$$

1. Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
2. Montrer que f a un unique point critique. En ce point critique, la fonction f admet-elle un extremum local ? Dans ce cas, s'agit il d'un maximum local ou d'un minimum local ?
3. Representer le sous-ensemble L de $\mathbf{R}^2$:

$$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \leq 0 \text{ et } 3x_1 - x_2 \leq 3\}\ .$$

   Justifier que L est un fermé borné de $\mathbf{R}^2$.

4. Pourquoi la restriction de f à L admet elle un minimum en un point de L ? Ce minimum peut-il être atteint en un point de

$$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 > 0\ ,\ x_2 < 0 \text{ et } 3x_1 - x_2 < 3\}\ .$$

Solution de 1 : L'application f est polynomiale de deux variables. C'est donc une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$. Elle admet de plus des dérivées partielles à tout ordre continues sur $\mathbf{R}^2$. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -6x_1 + 2x_2 - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -6 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_1, x_2) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = -4\ .$$

Solution de 2 : Les points critiques de f sont les couples de réels (x_1, x_2) où les deux dérivées partielles d'ordre un de f sont nulles. Ceux sont donc les solutions dans $\mathbf{R}^2$ du système :

$$\begin{pmatrix} -6x_1 & + & 2x_2 & - & 3 & = & 0 & E_1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4 & = & 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} -6x_1 & + & 2x_2 & - & 3 & = & 0 \\ E_1 \\ 6x_1 & - & 12x_2 & + & 12 & = & 0 & 3E_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi par addition : $-10x_2+9=0$ et $x_2=\dfrac{9}{10}$. Reportons cette valeur dans E_1, nous obtenons successivement :

$$-6x_1+2(\frac{9}{10})-3=0 \quad , \quad -6x_1+\frac{9}{5}-3=0 \quad , \quad -6x_1+\frac{9}{5}-\frac{15}{5}=0 \; ,$$

$$-6x_1-\frac{6}{5}=0 \quad , \quad -6x_1=\frac{6}{5} \quad , \quad x_1=-\frac{6}{5\times 6}=-\frac{1}{5} \; .$$

Ainsi, si f a un point critique ce point est le couple de réel $(a,b)=(-\frac{1}{5},\frac{9}{10})$. Nous vérifions que ce couple convient bien et f admet donc comme unique point critique $(a,b)=(-\frac{1}{5},\frac{9}{10})$. Notre problème est un problème d'extremum libre à deux variables. Comme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b)-(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b))^2=(-6)\times(-4)-(2)^2=24-4=20>0 \; ,$$

l'application f admet un extremum local au point critique (a,b). Comme de plus :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a,b)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a,b)=-6+-4=-10<0 \; ,$$

l'application f admet un maximum local au point critique (a,b).

Solution de 3 : Le sous-ensemble L de $\mathbf{R}^2$ est obtenu comme intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1\geq 0\} \; , \\ L_2 & = & \{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2\leq 0\} \; , \\ L_3 & = & \{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \text{ tels que } 3x_1-x_2\leq 3\} \quad . \end{array}$$

L'ensemble L_1 se représente par le demi-plan H_1' délimité par la droite d'équation $x_1=0$ et contenant le point $(1,0)$. L'ensemble L_2 se représente par le demi-plan H_2' délimité par la droite d'équation $x_2=0$ et contenant le point $(0,-1)$. L'ensemble L_3 se représente par un demi-plan délimité H_3' par la droite D' d'équation $3x_1-x_2=3$. Le point A' de coordonnées $(0,x_2)$ appartient à D' si $x_2=-3$ et le point B' de coordonnées $(x_1,0)$ appartient à D' si $3x_1=3$, soit $x_1=1$. Ainsi, les points A' de coordonnées $(0,-3)$ et B' de coordonnées $(1,0)$ appartiennent à D'. D'autre part $3\times 0-0\leq 3$ et H_3' contient donc l'origine de coordonnées $(0,0)$. L_3 se représente comme le demi-plan H_3' s'appuyant sur D' qui contient l'origine. Ces trois demi-plans contiennent leurs droites d'appui, puisque les inégalités qui les définissent $(\leq,\geq,\leq)$ sont larges. La représention de L est donc le triangle T' avec son bord obtenu en prenant l'intersection des trois demi-plans H_1', H_2' et H_3'. Voir le dessin, ci dessous.

Les sous-ensembles L_1, L_2 et L_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités larges ≥ 0, ≤ 0 et ≤ 3. Ceux sont des fermés de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble L est donc fermé comme intersection de trois fermés. De plus L est borné, car compris par exemple dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.

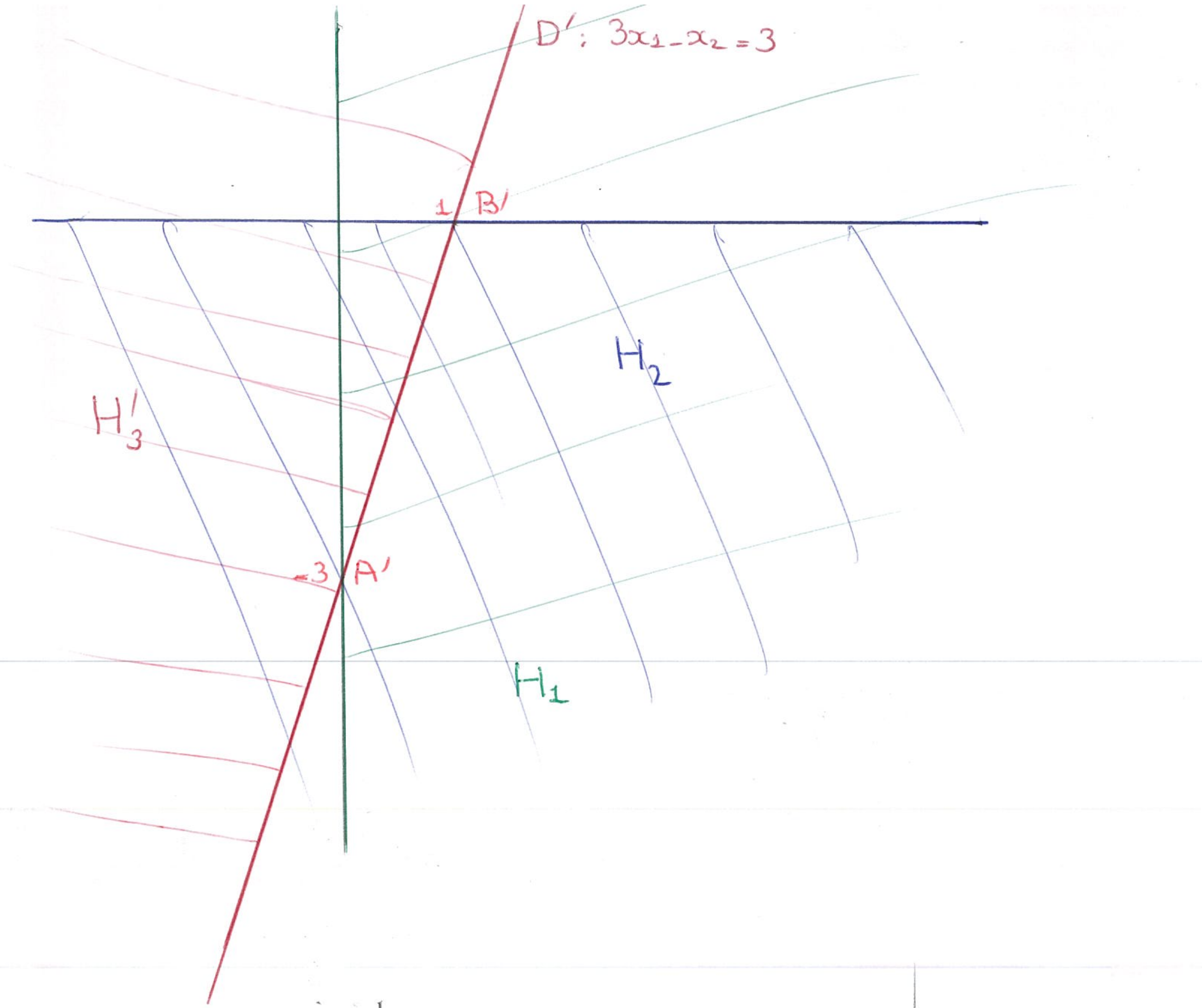
Solution de 4 : La fonction polynomiale f est continue, sa restriction à L est donc également continue. L'ensemble L est fermé borné. La restriction de f à L est donc une fonction numérique sur un fermé borné. Il existe dons des points de L où la restriction à L est minimum (respectivement maximum).

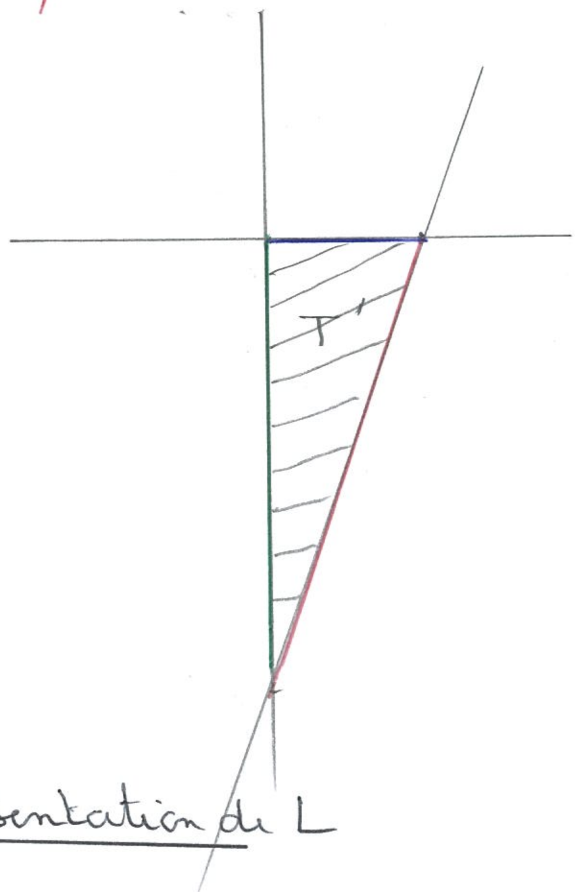
Le sous-ensemble V est inclus dans L. C'est l'intersection des trois sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} V_1 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_1 > 0\} , \\ V_2 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x_2 < 0\} , \\ V_3 & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } 3x_1 - x_2 \leq 2\} \end{array} .$$

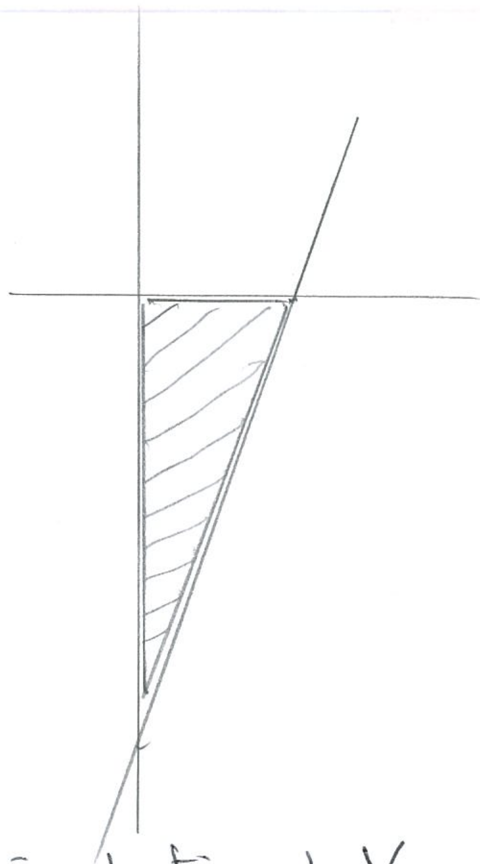
Ces sous-ensembles V_1, V_2 et V_3 sont définis par des fonctions polynomiales (donc continues) et des inégalités strictes > 0, < 0 et < 3. Ceus sont des ouverts de $\mathbf{R}^2$. L'ensemble V est donc ouvert comme intersection de trois ouverts. Cet ensemble V est contenu dans L. Sa représentation géométrique est l'intérieur du triangle T' qui représente L (ou encore le triangle T' moins son bord).

Si le minimum de la restriction de f à L est atteint en un point (a, b) de V, comme V est un ouvert inclus dans L ce serait un extremum local de f. Ce serait donc un point critique de f. Nous aurions donc $(a, b) = (-\frac{1}{5}, \frac{9}{10})$. Or, ce point n'appartient pas à V. Par exemple, car $\frac{9}{10}$ n'est pas négatif ou nul ou encore geométriquement car le point de coordonnées $(-\frac{1}{5}, \frac{9}{10})$ n'est pas dans le triangle T'. D'ou la contradiction. Ainsi, les points de L où la restriction de f à L sont minimum ne sont pas dans V. De même les points de L où la restriction de f à L sont maximum ne sont pas dans V.





<u>représentation de L</u>



<u>représentation de V</u>