Multiplicité et coloriage

Pierre Jammes

Nantes, 21 février 2014

Spectre du laplacien

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte.

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \dots$$

Spectre du laplacien

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte.

$$\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leq \lambda_2(M,g) \leq \dots$$

Question

La multiplicité des valeurs propres peut-elle être arbitrairement grande ?

Théorème (Cheng, 1976)

Pour tous entiers i et χ, il existe une constante $c(i, \chi)$ telle que si M est une surface compacte de caractéristique d'Euler χ, alors la multiplicité de $\lambda_i(M, g)$ est majorée par c.

Remarque : vrai pour les opérateurs de Schrödinger.

Théorème (Cheng, 1976)

Pour tous entiers i et χ, il existe une constante $c(i,\chi)$ telle que si M est une surface compacte de caractéristique d'Euler χ, alors la multiplicité de $\lambda_i(M,g)$ est majorée par c.

Remarque : vrai pour les opérateurs de Schrödinger.

Théorème (Colin de Verdière, ∼1987)

Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Si $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$ est une suite croissante finie de nombre strictement positifs, alors il existe une métrique g sur M telle que $\lambda_k(M,g) = a_k$ pour $k \leq N$.

Lemme (Courant)

La k-ième fonction propre du laplacien a au plus $k + 1$ domaines nodaux.

Lemme (Courant)

La k-ième fonction propre du laplacien a au plus $k+1$ domaines nodaux.

Lemme (Cheng)

Si x est un zéro d'ordre k d'une fonction propre f, alors f est C^1-conjuguée à $\mathrm{Re}(z^k)$ au voisinage de x.

Lemme (Courant)

La k-ième fonction propre du laplacien a au plus $k+1$ domaines nodaux.

Lemme (Cheng)

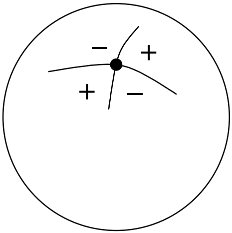
Si x est un zéro d'ordre k d'une fonction propre f, alors f est C^1-conjuguée à $\mathrm{Re}(z^k)$ au voisinage de x.

Lemme

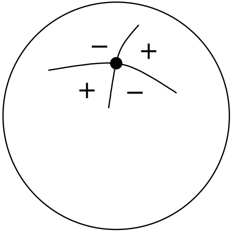
Soit x un point fixé. Dans un espace propre de dimension $\geq 2k$, il existe une fonction propre qui s'annule à l'ordre k.

Supposons que λ_1 soit de multiplicité 4 sur la sphère. Il existe une fonction propre qui s'annule à l'ordre 2 en un point donné.

Supposons que λ_1 soit de multiplicité 4 sur la sphère. Il existe une fonction propre qui s'annule à l'ordre 2 en un point donné.



Supposons que λ_1 soit de multiplicité 4 sur la sphère. Il existe une fonction propre qui s'annule à l'ordre 2 en un point donné.



$\Rightarrow$ Il y a au moins 3 domaines nodaux.

Schéma de démonstration du théorème de Colin de Verdière :

- On considère un graphe complet à $N + 1$ sommets.
- On construit sur le graphe un laplacien (riemannien) ayant le spectre souhaité (avec multiplicité).

Schéma de démonstration du théorème de Colin de Verdière :

- On considère un graphe complet à $N + 1$ sommets.
- On construit sur le graphe un laplacien (riemannien) ayant le spectre souhaité (avec multiplicité).
- On plonge le graphe dans la variété et on fait tendre le début du spectre de la variété vers celui du graphe.

Schéma de démonstration du théorème de Colin de Verdière :

- On considère un graphe complet à $N+1$ sommets.
- On construit sur le graphe un laplacien (riemannien) ayant le spectre souhaité (avec multiplicité).
- On plonge le graphe dans la variété et on fait tendre le début du spectre de la variété vers celui du graphe.
- Argument de transversalité d'Arnol'd : quitte à déformer le graphe, on peut réaliser le spectre souhaité sur la variété.

Meilleures majorations connues

On note $m_k(\Sigma)$ la multiplicité maximale de λ_k sur Σ.

- $m_k(\Sigma) \leq 2k - 2\chi(\Sigma) + 5$ (Nadirashvili, 1988)
- $m_1(\Sigma) \leq 5 - \chi(\Sigma)$ si $\chi \leq -1$ (Sévennec, 2002)

Meilleures majorations connues

On note $m_k(\Sigma)$ la multiplicité maximale de λ_k sur Σ.

- $m_k(\Sigma) \leq 2k - 2\chi(\Sigma) + 5$ (Nadirashvili, 1988)
- $m_1(\Sigma) \leq 5 - \chi(\Sigma)$ si $\chi \leq -1$ (Sévennec, 2002)

Théorème (Colin de Verdière, 1987)

Si on peut plonger le graphe complet à n sommets dans Σ, alors $m_1(\Sigma) \geq n - 1$.

Meilleures majorations connues

On note $m_k(\Sigma)$ la multiplicité maximale de λ_k sur Σ.

- $m_k(\Sigma) \leq 2k - 2\chi(\Sigma) + 5$ (Nadirashvili, 1988)
- $m_1(\Sigma) \leq 5 - \chi(\Sigma)$ si $\chi \leq -1$ (Sévennec, 2002)

Théorème (Colin de Verdière, 1987)

Si on peut plonger le graphe complet à n sommets dans Σ, alors $m_1(\Sigma) \geq n - 1$.

Bornes optimales

$m_1(S^2) = 3$ (Cheng, 76) $\quad m_1(P^2) = 5$ (Besson, 80)

$m_1(T^2) = 6$ (Besson) $\quad m_1(K^2) = 5$ (Colin de Verdière, 87)

$m_1(\Sigma) = 5 - \chi$ si $\chi = -1, -2, -3$ (Sévennec)

Conjecture (CdV, 87)

$$m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Conjecture (CdV, 87)

$$m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Définition(s)

- Le nombre chromatique $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ d'une surface Σ est la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes qu'on peut plonger dans Σ.

Conjecture (CdV, 87)

$$m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Définition(s)

- Le nombre chromatique $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ d'une surface Σ est la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes qu'on peut plonger dans Σ.
- $\mathrm{Chr}(\Sigma) = \lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(\Sigma)}}{2} \rfloor$ si $\Sigma \neq K^2$ et $\mathrm{Chr}(K^2) = 6$ (Heawood, Heffter,.. Ringel & Youngs, Appel & Haken).

Conjecture (CdV, 87)

$$m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Définition(s)

- Le nombre chromatique $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ d'une surface Σ est la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes qu'on peut plonger dans Σ.
- $\mathrm{Chr}(\Sigma) = \lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(\Sigma)}}{2} \rfloor$ si $\Sigma \neq K^2$ et $\mathrm{Chr}(K^2) = 6$ (Heawood, Heffter,.. Ringel & Youngs, Appel & Haken).
- $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ est le nombre de sommet du plus grand graphe complet plongeable dans Σ.

Conjecture (CdV, 87)

$$m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Définition(s)

- Le nombre chromatique $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ d'une surface Σ est la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes qu'on peut plonger dans Σ.
- $\mathrm{Chr}(\Sigma) = \lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(\Sigma)}}{2} \rfloor$ si $\Sigma \neq K^2$ et $\mathrm{Chr}(K^2) = 6$ (Heawood, Heffter,.. Ringel & Youngs, Appel & Haken).
- $\mathrm{Chr}(\Sigma)$ est le nombre de sommet du plus grand graphe complet plongeable dans Σ.

Théorème (Colin de Verdière, 1987)

$$m_1(\Sigma) \geq \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$$

Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Cas non homogène : on se donne des fonctions densités $\rho \in C^0(\partial M)$ et $\gamma \in C^1(M)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Cas non homogène : on se donne des fonctions densités $\rho \in C^0(\partial M)$ et $\gamma \in C^1(M)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Les solutions σ forment un spectre positif discret :

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho, \gamma) < \sigma_1(M, g, \rho, \gamma) \leq \sigma_2(M, g, \rho, \gamma) \ldots$$

Spectre de Steklov

Le spectre de Steklov est le spectre d'un opérateur Dirichlet-Neumann

$$\Lambda_{\rho,\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} H^1(\partial M) & \to & L^2(\partial M) \\ u & \mapsto & \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial(\mathcal{H}_\gamma u)}{\partial \nu} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H}_\gamma u \text{ est défini par } \operatorname{div}(\gamma \nabla(\mathcal{H}_\gamma u)) = 0$$

Auto-adjoint pour la norme de Hilbert $\|u\|^2 = \int_{\partial M} u^2 \rho \, dv_g$.

Spectre de Steklov

Le spectre de Steklov est le spectre d'un opérateur Dirichlet-Neumann

$$\Lambda_{\rho,\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} H^1(\partial M) & \to & L^2(\partial M) \\ u & \mapsto & \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial(\mathcal{H}_\gamma u)}{\partial \nu} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{H}_\gamma u \text{ est défini par } \operatorname{div}(\gamma \nabla(\mathcal{H}_\gamma u)) = 0$$

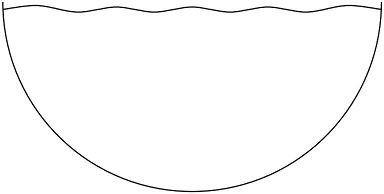
Auto-adjoint pour la norme de Hilbert $\|u\|^2 = \int_{\partial M} u^2 \rho \mathrm{d}v_g$.

Caractérisation variationnelle du spectre :

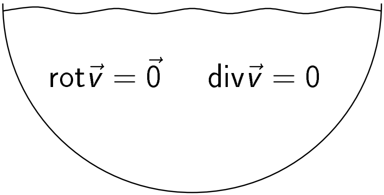
$$\sigma_k(M, g, \rho, \gamma) = \inf_{V_{k+1} \in H^1(M)} \sup_{f \in V_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\mathrm{d}f|^2 \gamma \, \mathrm{d}v_g}{\int_{\partial M} f^2 \rho \, \mathrm{d}v_g},$$

où V_k parcours les sous-espaces de dimension k de $H^1(M)$.

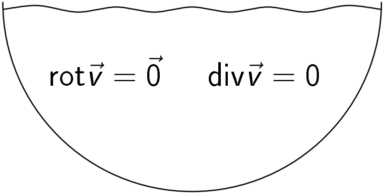
Motivation I : ballottement



Motivation I : ballottement

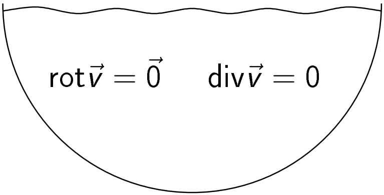


Motivation I : ballottement



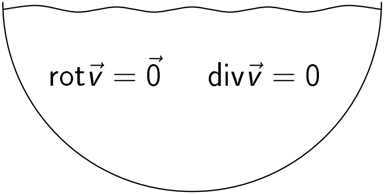
$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \nabla u$$

Motivation I : ballottement



$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \nabla u, \quad \Delta u = 0$$

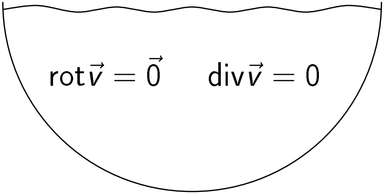
Motivation I : ballottement



$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \nabla u, \quad \Delta u = 0$$

u vérifie la condition de Neumann le long des parois.

Motivation I : ballottement



$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \nabla u, \quad \Delta u = 0$$

u vérifie la condition de Neumann le long des parois.

$$\text{petites oscillations} \longleftrightarrow \text{spectre de Steklov-Neumann}$$

Motivation II (A. Fraser & R. Schoen)

Soit $M \to B^n$ une immersion de M dans la boule unité telle que $\partial M \to S^{n-1}$. On suppose que l'immersion est minimale, c'est-à-dire que :

- la courbure moyenne de l'immersion est nulle ;
- M est orthogonal à S^{n-1} le long du bord.

Motivation II (A. Fraser & R. Schoen)

Soit $M \to B^n$ une immersion de M dans la boule unité telle que $\partial M \to S^{n-1}$. On suppose que l'immersion est minimale, c'est-à-dire que :

- la courbure moyenne de l'immersion est nulle ;
- M est orthogonal à S^{n-1} le long du bord.

Alors les formes linéaires de $\mathbb{R}^n$ restreintes à M sont des fonctions propres de Steklov pour la valeur propre 1.

Multiplicité

Théorème (J., 2012)

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$. Étant donnée une fonction strictement positive $\rho \in C^0(\partial M)$, un entier $N \geq 1$ et une suite finie de réels strictement positifs $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$, il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g telle que

$$\sigma_k(M, \rho, \tilde{g}) = a_k$$

pour tout $k \in [1, N]$.

Multiplicité

Théorème (J., 2012)

Soit (M^n, g) *une variété riemannienne compacte à bord de dimension* $n \geq 3$*. Étant donnée une fonction strictement positive* $\rho \in C^0(\partial M)$*, un entier* $N \geq 1$ *et une suite finie de réels strictement positifs* $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$*, il existe une métrique* $\tilde{g}$ *conforme à* g *telle que*

$$\sigma_k(M, \rho, \tilde{g}) = a_k$$

pour tout $k \in [1, N]$*.*

Principe de la démonstration : Utiliser un graphe complet dont les sommets sont placés sur ∂M.

Multiplicité

Théorème

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

Multiplicité

Théorème

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

- A. Fraser & R. Schoen (techniques de Cheng et Besson)

Multiplicité

Théorème

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

- A. Fraser & R. Schoen (techniques de Cheng et Besson)
- J. (même techniques)

Multiplicité

Théorème

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

- A. Fraser & R. Schoen (techniques de Cheng et Besson)
- J. (même techniques)
- M. Karpukhin, G. Kokarev & I. Polterovich (techniques de Nadirashvili)

Multiplicité

Théorème

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

- A. Fraser & R. Schoen (techniques de Cheng et Besson)
- J. (même techniques)
- M. Karpukhin, G. Kokarev & I. Polterovich (techniques de Nadirashvili)

Si $\partial\Sigma$ a l composantes connexes, alors

$$m_k(\Sigma) \leq 5 - 2\chi(\Sigma) - 2l + 2k$$

$$m_k(\Sigma) \leq 4 - 2\chi(\Sigma) + k$$

Nombre chromatique relatif

Definition

Soit Γ un graphe fini et Σ une surface compacte à bord. Un plongement de Γ dans Σ sera appelé *plongement propre* si ce plongement envoie tous les sommets de Γ sur $\partial\Sigma$.

Nombre chromatique relatif

Definition

Soit Γ un graphe fini et Σ une surface compacte à bord. Un plongement de Γ dans Σ sera appelé *plongement propre* si ce plongement envoie tous les sommets de Γ sur $\partial\Sigma$.

Definition

Si Σ est une surface compacte à bord, on appelle *nombre chromatique relatif* de Σ, noté $\mathrm{Chr}_0(\Sigma)$, la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes finis qui admettent un plongement propre dans Σ.

Nombre chromatique relatif

Definition

Soit Γ un graphe fini et Σ une surface compacte à bord. Un plongement de Γ dans Σ sera appelé *plongement propre* si ce plongement envoie tous les sommets de Γ sur $\partial\Sigma$.

Definition

Si Σ est une surface compacte à bord, on appelle *nombre chromatique relatif* de Σ, noté $\mathrm{Chr}_0(\Sigma)$, la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes finis qui admettent un plongement propre dans Σ.

Conjecture

Pour toute surface Σ compacte à bord, on a $m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}_0(\Sigma) - 1$.

Nombre chromatique relatif

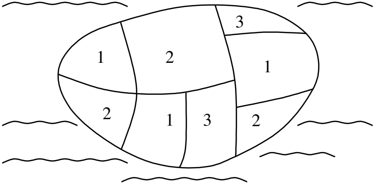
Question

Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?

Nombre chromatique relatif

Question

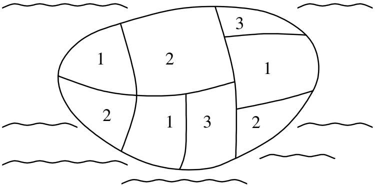
Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?

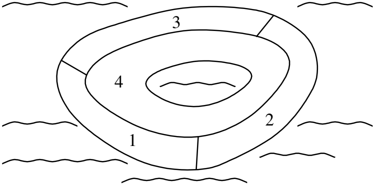


Nombre chromatique relatif

Question

Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?





Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \mathrm{Chr}(\Sigma)$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \mathrm{Chr}(\Sigma)$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_1) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à* p *et par somme connexe*
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \mathrm{Chr}(\Sigma)$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_1) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \dfrac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \mathrm{Chr}(\Sigma)$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_1) = \mathrm{Chr}(\Sigma) - 1$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \dfrac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}$
- $\mathrm{Chr}_0(\Sigma_p)$ *est le nombre de sommet du plus grand graphe complet proprement plongeable dans Σ_p*

Nombre chromatique relatif

Nombre chromatique relatif des surfaces de petit genre

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	-2	-3	-4	-5	$\#4\mathbb{T}^2$	-7
1	3	5	5	6	6	7	8	8	9	9	9
2	4	5	6	6	7	?	8	?	9	9	?
3	4	6	6	7	7	8	9	9	9	10	10
4	4	6	6	7	7	8	9	9	10	10	10

Nombre chromatique relatif

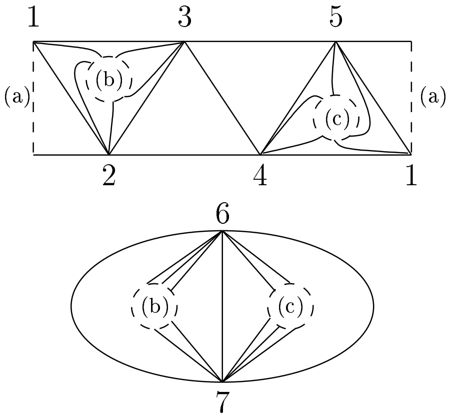
Nombre chromatique relatif des surfaces de petit genre

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	-2	-3	-4	-5	$\#4\mathbb{T}^2$	-7
1	3	5	5	6	6	7	8	8	9	9	9
2	4	5	6	6	7	?	8	?	9	9	?
3	4	6	6	7	7	8	9	9	9	10	10
4	4	6	6	7	7	8	9	9	10	10	10

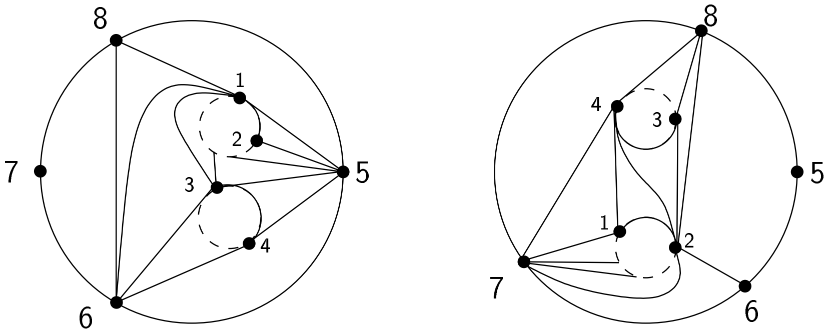
Remarque

Dans tous ces exemples sauf $\mathbb{P}^2_2$, on a égalité avec
$\inf\left\{\mathrm{Chr}(\Sigma), \lfloor\frac{5+\sqrt{25-24\chi(\Sigma)+24p}}{2}\rfloor\right\}$.

Plongement propre de K_7 dans $\#3\mathbb{P}_2^2$



Plongement de K_8 dans $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$



La conjecture $m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}_0(\Sigma) - 1$ est vérifiée dans les cas suivants :

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	-2	-3
1	2	4	?	5	?	?	?
2	3	4	5	?	6	?	?
3	3	5	5	6	6	7	8
4	3	5	5	6	6	7	8

La conjecture $m_1(\Sigma) = \mathrm{Chr}_0(\Sigma) - 1$ est vérifiée dans les cas suivants :

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	-2	-3
1	2	4	?	5	?	?	?
2	3	4	5	?	6	?	?
3	3	5	5	6	6	7	8
4	3	5	5	6	6	7	8

Théorème (J.)

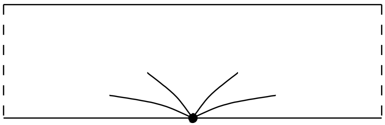
$$m_1(\Sigma) \geq \mathrm{Chr}_0(\Sigma) - 1$$

Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_1)$

- On suppose que la multiplicité de σ_1 est au moins 5.
- Soit x un point du bord. Il existe une fonction propre f telle que f n'annule à l'ordre 4 en x.

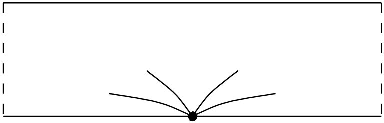
Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_1)$

- On suppose que la multiplicité de σ_1 est au moins 5.
- Soit x un point du bord. Il existe une fonction propre f telle que f n'annule à l'ordre 4 en x.
- Il existe au moins 4 arcs nodaux partant de x (Fraser-Schoen).



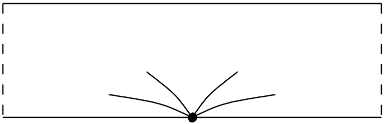
Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_1)$

- On suppose que la multiplicité de σ_1 est au moins 5.
- Soit x un point du bord. Il existe une fonction propre f telle que f n'annule à l'ordre 4 en x.
- Il existe au moins 4 arcs nodaux partant de x (Fraser-Schoen).



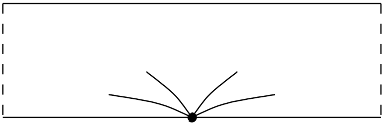
- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.

Majoration de $m_1(\mathbb{P}_1^2)$



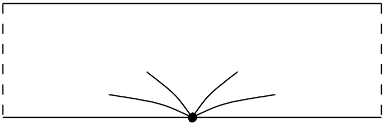
- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.

Majoration de $m_1(\mathbb{P}_1^2)$



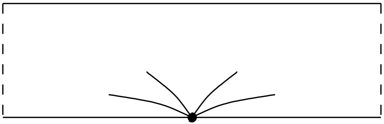
- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.
- Argument 1 : dans le cas contraire, la fonction propre est de signe constant sur le bord, donc de signe constant partout.

Majoration de $m_1(\mathbb{P}_1^2)$



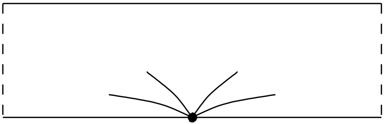
- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.
- Argument 1 : dans le cas contraire, la fonction propre est de signe constant sur le bord, donc de signe constant partout.
- Argument 2 : l'ensemble nodal est incompressible (son groupe fondamental s'injecte dans celui de la variété).

Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_1)$



- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.
- Argument 1 : dans le cas contraire, la fonction propre est de signe constant sur le bord, donc de signe constant partout.
- Argument 2 : l'ensemble nodal est incompressible (son groupe fondamental s'injecte dans celui de la variété).
- En notant Γ le graphe nodal, on a $0 = \chi(\mathbb{P}^2_1) \leq \chi(\Gamma) + 2$.

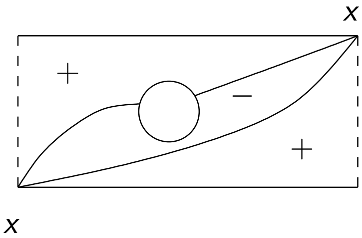
Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_1)$



- Il existe au moins deux autres extrémités de lignes nodales.
- Argument 1 : dans le cas contraire, la fonction propre est de signe constant sur le bord, donc de signe constant partout.
- Argument 2 : l'ensemble nodal est incompressible (son groupe fondamental s'injecte dans celui de la variété).
- En notant Γ le graphe nodal, on a $0 = \chi(\mathbb{P}^2_1) \leq \chi(\Gamma) + 2$.
- Il y a au moins trois lignes nodales non compactes, donc $\chi(\Gamma) \leq -3$.

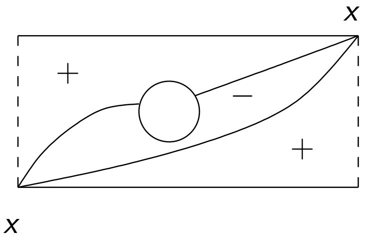
Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_2)$

- L'étude faite pour $m_1(\mathbb{P}^2_1)$ contraint la topologie des lignes nodales.



Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_2)$

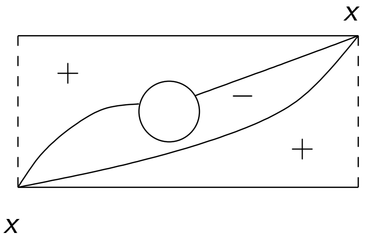
- L'étude faite pour $m_1(\mathbb{P}^2_1)$ contraint la topologie des lignes nodales.



- Le domaine nodal négatif rencontre nécessairement le deuxième bord.

Majoration de $m_1(\mathbb{P}_2^2)$

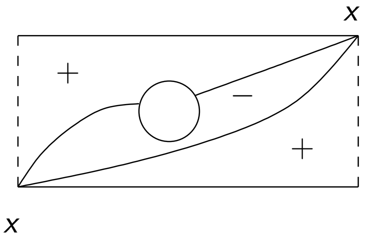
- L'étude faite pour $m_1(\mathbb{P}_1^2)$ contraint la topologie des lignes nodales.



- Le domaine nodal négatif rencontre nécessairement le deuxième bord.
- Quand on fait varier x le long du bord, la fonction propre associée et ses domaines nodaux se déforment continûment.

Majoration de $m_1(\mathbb{P}^2_2)$

- L'étude faite pour $m_1(\mathbb{P}^2_1)$ contraint la topologie des lignes nodales.



- Le domaine nodal négatif rencontre nécessairement le deuxième bord.
- Quand on fait varier x le long du bord, la fonction propre associée et ses domaines nodaux se déforment continûment.
- Si x fait un tour complet du bord, le domaine négatif « s'enroule » autour du ruban, mais doit revenir à sa position initiale.

Critère de plongement

Corollaire

Si un graphe admet un plongement propre dans $\mathbb{P}^2_1$ *ou* $\mathbb{P}^2_2$, *alors il admet un plongement non entrelacé dans* $\mathbb{R}^3$.

Critère de plongement

Corollaire

Si un graphe admet un plongement propre dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors il admet un plongement non entrelacé dans $\mathbb{R}^3$.

On note $\mu(\Gamma)$ l'invariant de Colin de Verdière du graphe Γ.

Critère de plongement

Corollaire

Si un graphe admet un plongement propre dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors il admet un plongement non entrelacé dans $\mathbb{R}^3$.

On note $\mu(\Gamma)$ l'invariant de Colin de Verdière du graphe Γ.

$\mu(\Gamma)$ est la multiplicité maximale stable de la 2e valeur propre des opérateur de Schrödinger sur Γ.

Critère de plongement

Corollaire

Si un graphe admet un plongement propre dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors il admet un plongement non entrelacé dans $\mathbb{R}^3$.

On note $\mu(\Gamma)$ l'invariant de Colin de Verdière du graphe Γ.

$\mu(\Gamma)$ est la multiplicité maximale stable de la 2$^{\text{e}}$ valeur propre des opérateur de Schrödinger sur Γ.

On dit que la multiplicité est stable si elle vérifie l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd : au point de l'espace des matrices symétriques correspondant à l'opérateur considéré, le sous-espace des matrices d'opérateurs coupe transversalement l'espace des matrices ayant la même multiplicité.

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).
- $\mu(\Gamma) \leq 3 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire (CdV, 1990).

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).
- $\mu(\Gamma) \leq 3 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire (CdV, 1990).
- $\mu(\Gamma) \leq 4 \Leftrightarrow \Gamma$ non entrelacé. (Bacher-CdV, Lovász-Schrijver)

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).
- $\mu(\Gamma) \leq 3 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire (CdV, 1990).
- $\mu(\Gamma) \leq 4 \Leftrightarrow \Gamma$ non entrelacé. (Bacher-CdV, Lovász-Schrijver)
- Si Γ est proprement plongé dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors $\mu(\Gamma) \leq 4$.

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).
- $\mu(\Gamma) \leq 3 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire (CdV, 1990).
- $\mu(\Gamma) \leq 4 \Leftrightarrow \Gamma$ non entrelacé. (Bacher-CdV, Lovász-Schrijver)
- Si Γ est proprement plongé dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors $\mu(\Gamma) \leq 4$.
- $\mu(\Gamma) \leq 5 \Leftrightarrow \Gamma$ non noué ?

Critère de plongement

- $\mu(\Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \Gamma$ linéaire.
- $\mu(\Gamma) \leq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire extérieur (pr. plongeable dans $\mathbb{D}^2$).
- $\mu(\Gamma) \leq 3 \Leftrightarrow \Gamma$ planaire (CdV, 1990).
- $\mu(\Gamma) \leq 4 \Leftrightarrow \Gamma$ non entrelacé. (Bacher-CdV, Lovász-Schrijver)
- Si Γ est proprement plongé dans $\mathbb{P}^2_1$ ou $\mathbb{P}^2_2$, alors $\mu(\Gamma) \leq 4$.

- $\mu(\Gamma) \leq 5 \Leftrightarrow \Gamma$ non noué ?
- $\mathrm{Chr}(\Gamma) \leq \mu(\Gamma) + 1$?