Variations chromatiques

Pierre Jammes

Cirm, septembre 2017

Nombre chromatique d'une surface

Théorème des quatre couleurs

Toute carte planaire peut être coloriée avec quatre couleurs de manière à ce que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur.

Tout graphe planaire peut être colorié à l'aide d'au plus quatre couleurs.

Nombre chromatique d'une surface

Théorème des quatre couleurs

Toute carte planaire peut être coloriée avec quatre couleurs de manière à ce que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur.

Tout graphe planaire peut être colorié à l'aide d'au plus quatre couleurs.

Problème de Heawood

Pour une surface compacte S donnée, quel est le nombre minimal de couleur qui permet de colorier n'importe quel graphe plongé dans S ?

Nombre chromatique d'une surface

Théorème des quatre couleurs

Toute carte planaire peut être coloriée avec quatre couleurs de manière à ce que deux régions adjacentes n'aient pas la même couleur.

Tout graphe planaire peut être colorié à l'aide d'au plus quatre couleurs.

Problème de Heawood

Pour une surface compacte S donnée, quel est le nombre minimal de couleur qui permet de colorier n'importe quel graphe plongé dans S ?
Ce nombre est appelé *nombre chromatique* de S. On le notera $C(\Sigma)$.

Problème de Heawood

Théorème (P. J. Heawood, 1890)

Le nombre chromatique d'une surface orientable de genre non nul est majoré par

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)}}{2} \right\rfloor .$$

Problème de Heawood

Théorème (P. J. Heawood, 1890)

Le nombre chromatique d'une surface orientable de genre non nul est majoré par

$$\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi(\Sigma)}}{2} \right\rfloor.$$

Théorème (L. Heffter, 1891)

Il y a égalité pour les surfaces orientables de genre ≤ 6.

Problem der Nachbargebiete

L. Heffter cherche en fait à répondre à la question suivante :

Problème

Quel est le plus grand graphe complet qu'on peut plonger dans une surface donnée ?

Problem der Nachbargebiete

L. Heffter cherche en fait à répondre à la question suivante :

Problème

Quel est le plus grand graphe complet qu'on peut plonger dans une surface donnée ?

Problème dual

Quel est le genre minimal g d'une surface orientable dans laquelle on peut plonger un graphe complet à n sommets ?

$$g \geq \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$$

Théorème (Heffter)

Si l'une des deux conditions suivantes est réalisé, alors il y a égalité :

- $n \leq 12$;

Théorème (Heffter)

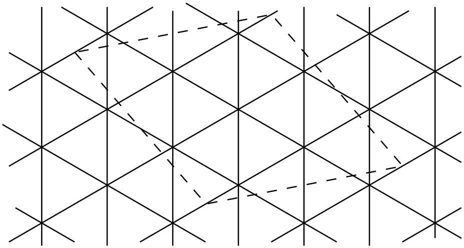
Si l'une des deux conditions suivantes est réalisé, alors il y a égalité :

- $n \leq 12$;
- n *est de la forme* $n = 12k + 7$, *où le nombre* $p = 4k + 3$ *est premier et tel que l'ordre de 2 dans* $(Z/pZ)^*$ *soit* $p - 1$ *ou* $(p-1)/2$.

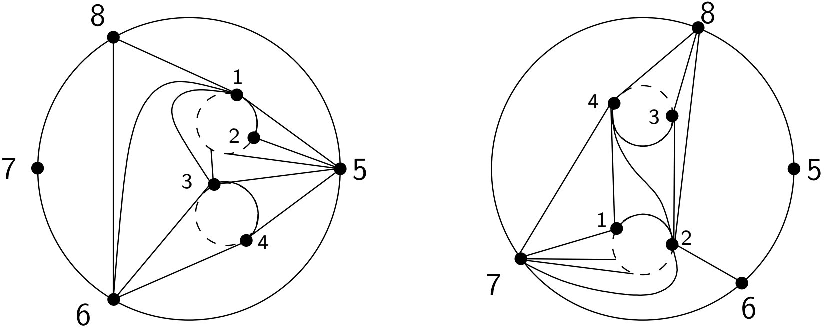
Théorème (Heffter)

Si l'une des deux conditions suivantes est réalisé, alors il y a égalité :

- $n \leq 12$;
- *n est de la forme* $n = 12k + 7$, *où le nombre* $p = 4k + 3$ *est premier et tel que l'ordre de 2 dans* $(Z/pZ)^*$ *soit* $p - 1$ *ou* $(p - 1)/2$.

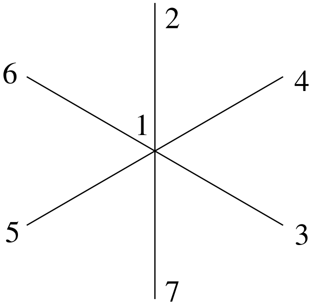


Plongement de K_8 dans $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$



1)	2	4	3	7	5	6
2)	3	5	4	1	6	7
3)	4	6	5	2	7	1
4)	5	7	6	3	1	2
5)	6	1	7	4	2	3
6)	7	2	1	5	3	4
7)	1	3	2	6	4	5

1)	2	4	3	7	5	6
2)	3	5	4	1	6	7
3)	4	6	5	2	7	1
4)	5	7	6	3	1	2
5)	6	1	7	4	2	3
6)	7	2	1	5	3	4
7)	1	3	2	6	4	5



Le cas non orientable

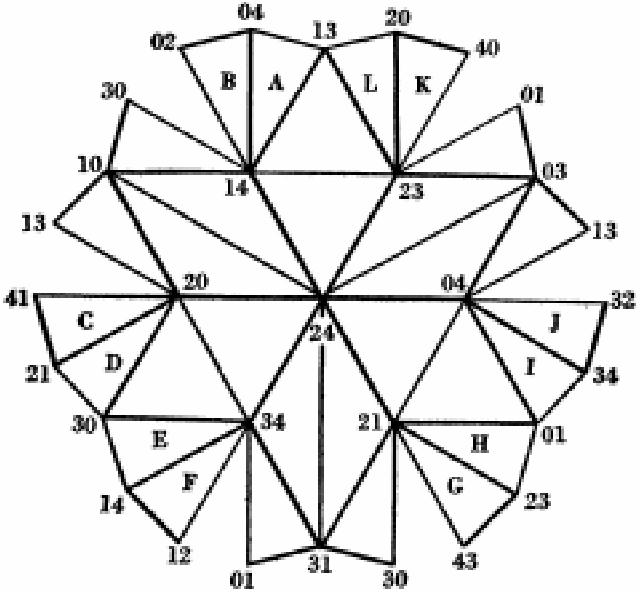
La formule de Heawood est fausse pour le « tube » de Klein (P. Franklin, 1934).

Le cas non orientable

La formule de Heawood est fausse pour le « tube » de Klein (P. Franklin, 1934).

Surfaces de petit genre

1	H. Tietze	1910
0	P. Franklin	1934
-1	I. N. Kagno	1935
-2	I. N. Kagno	1935
-3	H. S. M. Coxeter	1943
-4	I. N. Kagno	1935
-5	Bose	1939



Coxeter, 1943

Les choses sérieuses

Théorème (G. Ringel, 1952)

Pour toute surface non orientable autre que le « sac de Klein », le nombre chromatique est égal au nombre de Heawood.

Les choses sérieuses

Théorème (G. Ringel, 1952)

Pour toute surface non orientable autre que le « sac de Klein », le nombre chromatique est égal au nombre de Heawood.

Théorème (G. Ringel, 1954)

Le nombre chromatique d'une surface orientable est réalisé par un graphe complet.

La dernière ligne droite ?

Pour les surfaces orientables, la résolution se décompose en 12 cas selon le résidu de n (nombre de sommets du graphe complet) modulo 12.

1954	G. Ringel	$n \equiv 5$
1961	G. Ringel	$n \equiv 3, 7, 10$
1963	G. Gustin	$n \equiv 3, 4, 7$
1963	C.M. Terry, L. L.R. Welch et J.W.T. Youngs	$n \equiv 0$
1963-65	Gustin, Youngs	$n \equiv 1, 9$
1966	Youngs	$n \equiv 6$
1967-68	Ringel, Youngs	$n \equiv 2, 8, 11$

La dernière ligne droite ?

Pour les surfaces orientables, la résolution se décompose en 12 cas selon le résidu de n (nombre de sommets du graphe complet) modulo 12.

1954	G. Ringel	$n \equiv 5$
1961	G. Ringel	$n \equiv 3, 7, 10$
1963	G. Gustin	$n \equiv 3, 4, 7$
1963	C.M. Terry, L. L.R. Welch et J.W.T. Youngs	$n \equiv 0$
1963-65	Gustin, Youngs	$n \equiv 1, 9$
1966	Youngs	$n \equiv 6$
1967-68	Ringel, Youngs	$n \equiv 2, 8, 11$

Dans certains cas, la méthode échoue pour les petites valeurs de n.

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

$n = 18, 20, 23$: J. Mayer (1967).

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

$n = 18, 20, 23$: J. Mayer (1967).

$n = 59$: R. Guy (1968).

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

$n = 18, 20, 23$: J. Mayer (1967).

$n = 59$: R. Guy (1968).

$n = 35, 47$: Ringel et Youngs (1968).

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

$n = 18, 20, 23$: J. Mayer (1967).

$n = 59$: R. Guy (1968).

$n = 35, 47$: Ringel et Youngs (1968).

$n = 30$: Mayer, Ringel & Youngs (1968).

Les cas sporadiques

À la fin de l'année 1967, les cas suivants restaient à traiter : 18, 20, 23, 30, 35, 47 et 59.

$n = 18, 20, 23$: J. Mayer (1967).

$n = 59$: R. Guy (1968).

$n = 35, 47$: Ringel et Youngs (1968).

$n = 30$: Mayer, Ringel & Youngs (1968).

G. Ringel, *Map color theorem*, 1974

Multiplicité de valeurs propres

Problème

Sur une variété donnée, la multiplicité de la deuxième valeur propre d'un opérateur de Schrödinger peut-elle être arbitrairement grande ?

Multiplicité de valeurs propres

Problème

Sur une variété donnée, la multiplicité de la deuxième valeur propre d'un opérateur de Schrödinger peut-elle être arbitrairement grande ?

Théorème (Cheng, 1976)

Pour tous entiers i et χ, il existe une constante $c(i, \chi)$ telle que si Σ est une surface compacte de caractéristique d'Euler χ, alors la multiplicité de la i-ième valeur propre de n'importe quel opérateur de Schrodinger sur Σ est majorée par c.

Bornes optimales pour la deuxième valeur propre

$m(S^2) = 3$ (Cheng, 76) $\quad m(P^2) = 5$ (Besson, 80)
$m(T^2) = 6$ (Besson) $\quad m(K^2) = 5$ (Colin de Verdière, 87)
$m(\Sigma) = 5 - \chi$ si $\chi = -1, -2, -3$ (Sévennec 02)

Multiplicité de valeurs propres

Conjecture (Colin de Verdière, 87)

$$m(\Sigma) = \mathsf{C}(\Sigma) - 1$$

Multiplicité de valeurs propres

Conjecture (Colin de Verdière, 87)

$$m(\Sigma) = \mathrm{C}(\Sigma) - 1$$

Théorème (CdV, 1987)

$$m(\Sigma) \geq \mathrm{C}(\Sigma) - 1$$

Plongements tendus de surfaces

Définition

Soit Σ une surface compacte. Un plongement $\Sigma \to R^n$ est dit substantiel si son image n'est pas contenue dans un hyperplan.

Plongements tendus de surfaces

Définition

Soit Σ une surface compacte. Un plongement $\Sigma \to R^n$ est dit substantiel si son image n'est pas contenue dans un hyperplan.

Définition

Un plongement substantiel $\Sigma \to R^n$ est tendu s'il vérifie l'une des propriétés équivalents suivantes :

- tout hyperplan qui contient un point isolé de Σ est un hyperplan d'appui ;
- toute forme linéaire restreinte à Σ a un unique minimum local ;
- tout hyperplan sépare Σ en au plus deux composantes connexes ;
- le plongement minimise la courbure totale (norme L^1 de la courbure de Gauss) de la surface.

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kuiper, '62)

Si $\Sigma \to R^n$ *est un plongement lisse substantiel et tendu alors* $n \leq 4$*, sauf pour le plan projectif pour lequel* $n \leq 5$*.*

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kuiper, '62)

Si $\Sigma \to R^n$ *est un plongement lisse substantiel et tendu alors* $n \leq 4$*, sauf pour le plan projectif pour lequel* $n \leq 5$*.*

Théorème (Banchoff, '65)

Pour tout $n \geq 3$*, il existe une surface* Σ *et un plongement polyédral* $\Sigma \to R^n$ *qui soit substantiel et tendu.*

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kuiper, '62)

Si $\Sigma \to R^n$ est un plongement lisse substantiel et tendu alors $n \leq 4$, sauf pour le plan projectif pour lequel $n \leq 5$.

Théorème (Banchoff, '65)

Pour tout $n \geq 3$, il existe une surface Σ et un plongement polyédral $\Sigma \to R^n$ qui soit substantiel et tendu.

Si Σ admet un tel plongement, alors $n \leq \frac{5+\sqrt{49-24\chi(\Sigma)}}{2}$.

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kühnel, '80)

Soit Σ une surface close et $C(\Sigma)$ son nombre chromatique. Il existe un plongement polyédral substantiel et tendu de Σ dans R^n si et seulement si :

- $3 \leq n \leq C(\Sigma) - 1$ *si* Σ *est orientable ;*
- $4 \leq n \leq C(\Sigma) - 1$ *si* Σ *est non orientable.*

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kühnel, '80)

Soit Σ une surface close et $C(\Sigma)$ son nombre chromatique. Il existe un plongement polyédral substantiel et tendu de Σ dans R^n si et seulement si :

- $3 \leq n \leq C(\Sigma) - 1$ *si Σ est orientable ;*
- $4 \leq n \leq C(\Sigma) - 1$ *si Σ est non orientable.*

Théorème (Kühnel, '80)

Soit Σ une surface compacte à bord et $C(\Sigma)$ son nombre chromatique. Il existe un plongement polyédral substantiel et tendu de Σ dans R^n si et seulement si :

- $2 \leq n \leq 3 = C(\Sigma) - 1$ *si Σ est un domaine du plan ;*
- $3 \leq n \leq C(\Sigma) - 1$ *sinon.*

Plongements tendus de surfaces

Définition

Un plongement $\Sigma \to R^n$ est fortement tendu si pour tout demi-espace affine H de R^n, l'inclusion $\Sigma \cap H \to \Sigma$ induit une application injective en homologie pour tout degré.

Notation

Pour une surface close Σ et un entier $p \geq 1$, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Lemme

Si $\Sigma \to R^n$ est un plongement substantiel d'une surface à bord, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- *le plongement est fortement tendu ;*
- *le plongement est tendu et tous les sommets extrémaux de Σ sont sur son bord.*

Plongements tendus de surfaces

Théorème (Kühnel, ’80)

Soit Σ une surface compacte et $C(\Sigma)$ son nombre chromatique. Il existe un plongement polyédral substantiel et fortement tendu de Σ_1 dans R^n si et seulement si :

- $3 \leq n \leq C(\Sigma) - 2$ *si* Σ *n’est pas la sphère ;*
- $n = 2 = C(\Sigma) - 2$ *si* Σ *est la sphère.*

Théorème (Kühnel, ’80)

Soit Σ une surface close qui n’est ni la sphère ni la bouteille de Klein, et $p \geq 2$ un entier. Il existe un plongement polyédral substantiel et fortement tendu $\Sigma_p \to R^n$ pour tout n vérifiant $3 \leq n \leq C(\Sigma) - 2$, et pour $n = C(\Sigma) - 1$ si $p \geq n/2$.

Nombre chromatique relatif

Definition

Soit Γ un graphe fini et Σ une surface compacte à bord. Un plongement de Γ dans Σ sera appelé *plongement propre* si ce plongement envoie tous les sommets de Γ sur $\partial\Sigma$.

Nombre chromatique relatif

Definition

Soit Γ un graphe fini et Σ une surface compacte à bord. Un plongement de Γ dans Σ sera appelé *plongement propre* si ce plongement envoie tous les sommets de Γ sur $\partial\Sigma$.

Definition

Si Σ est une surface compacte à bord, on appelle *nombre chromatique relatif* de Σ, noté $C_0(\Sigma)$, la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes finis qui admettent un plongement propre dans Σ.

Nombre chromatique relatif

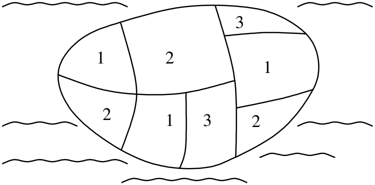
Question

Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?

Nombre chromatique relatif

Question

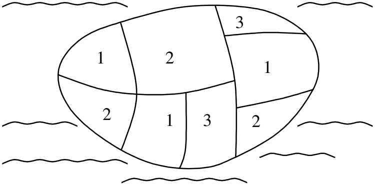
Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?

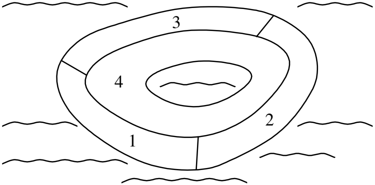


Nombre chromatique relatif

Question

Combien de couleurs faut-il pour colorier la carte d'un continent dont tous les pays ont un accès à la mer ?





Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $C_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $C_0(\Sigma_p) \leq C(\Sigma)$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $C_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $C_0(\Sigma_p) \leq C(\Sigma)$
- $C_0(\Sigma_1) = C(\Sigma) - 1$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $C_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à* p *et par somme connexe*
- $C_0(\Sigma_p) \leq C(\Sigma)$
- $C_0(\Sigma_1) = C(\Sigma) - 1$
- $C_0(\Sigma_p) \leq \dfrac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}$

Nombre chromatique relatif

Si Σ est une surface close, on note Σ_p la surface obtenue en enlevant p disques disjoints à Σ.

Théorème

- $C_0(\Sigma_p)$ *est monotone par rapport à p et par somme connexe*
- $C_0(\Sigma_p) \leq C(\Sigma)$
- $C_0(\Sigma_1) = C(\Sigma) - 1$
- $C_0(\Sigma_p) \leq \dfrac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}$
- $C_0(\Sigma_p)$ *est le nombre de sommet du plus grand graphe complet proprement plongeable dans* Σ_p

Nombre chromatique relatif

Nombre chromatique relatif des surfaces de petit genre

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	$2\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{P}^2$	-3	-4	-5	$4\mathbb{T}^2$	-7
1	3	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9
2	4	5	6	6	7	8	?	8	?	9	9	?
3	4	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10
4	4	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10

Nombre chromatique relatif

Nombre chromatique relatif des surfaces de petit genre

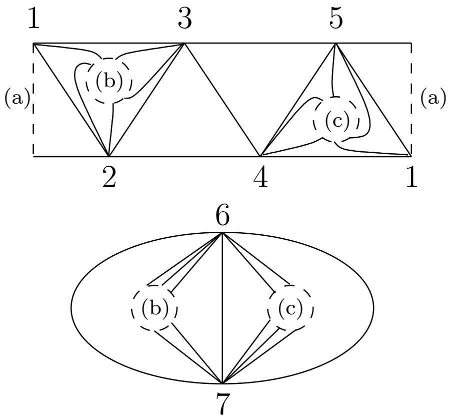
	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	$2\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{P}^2$	-3	-4	-5	$4\mathbb{T}^2$	-7
1	3	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9
2	4	5	6	6	7	8	?	8	?	9	9	?
3	4	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10
4	4	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10

Remarque

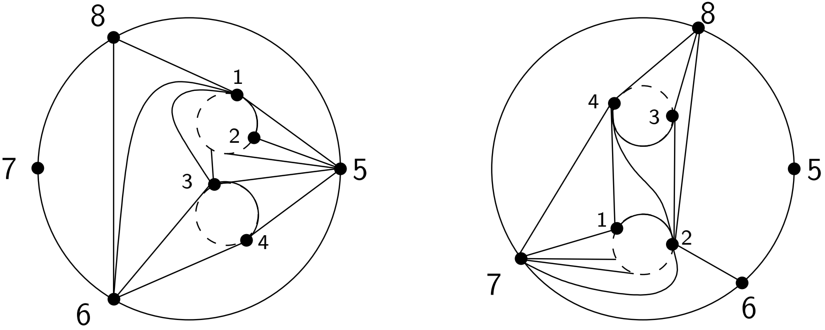
Dans tous ces exemples sauf $\mathbb{P}^2_2$, on a égalité avec

$$\inf\left\{C(\Sigma), \left\lfloor \frac{5+\sqrt{25-24\chi(\Sigma)+24p}}{2} \right\rfloor\right\}.$$

Plongement propre de K_7 dans $\#3\mathbb{P}_2^2$



Plongement de K_8 dans $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$



Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in R$ et $f : \overline{M} \to R$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in R$ et $f : \overline{M} \to R$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Cas non homogène : on se donne des fonctions densités $\rho \in C^0(\partial M)$ et $\gamma \in C^1(M)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Spectre de Steklov

Soit M une variété compacte à bord. On veut résoudre le système, d'inconnues $\sigma \in R$ et $f : \overline{M} \to R$ (problème de Steklov homogène) :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Cas non homogène : on se donne des fonctions densités $\rho \in C^0(\partial M)$ et $\gamma \in C^1(M)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

Les solutions σ forment un spectre positif discret :

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho, \gamma) < \sigma_1(M, g, \rho, \gamma) \leq \sigma_2(M, g, \rho, \gamma) \ldots$$

Spectre de Steklov

Théorème (Fraser-Schoen, J., Karpukhin-Kokarev-Polterovich)

Si Σ *est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante* $c(\Sigma, k) > 0$ *telle que la multiplicité de* $\sigma_k(\Sigma)$ *soit majorée par* c*, indépendamment de* g*,* ρ *et* γ*.*

Spectre de Steklov

Théorème (Fraser-Schoen, J., Karpukhin-Kokarev-Polterovich)

Si Σ est une surface compacte à bord donnée, il existe une constante $c(\Sigma, k) > 0$ telle que la multiplicité de $\sigma_k(\Sigma)$ soit majorée par c, indépendamment de g, ρ et γ.

Conjecture (J.)

Pour toute surface Σ compacte à bord, la multiplicité maximale de la première valeur propre non nulle de Steklov est $m(\Sigma) = \mathrm{C}_0(\Sigma) - 1$.

Spectre de Steklov

La conjecture $m_1(\Sigma) = C_0(\Sigma) - 1$ est vérifiée dans les cas suivants :

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	$2\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{P}^2$	-3
1	2	4	?	5	5	6	6	7
2	3	4	5	?	6	7	?	?
3	3	5	5	6	6	7	7	8
4	3	5	5	6	6	7	7	8

Spectre de Steklov

La conjecture $m_1(\Sigma) = C_0(\Sigma) - 1$ est vérifiée dans les cas suivants :

	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{K}^2$	$\mathbb{T}^2$	-1	$2\mathbb{T}^2$	$4\mathbb{P}^2$	-3
1	2	4	?	5	5	6	6	7
2	3	4	5	?	6	7	?	?
3	3	5	5	6	6	7	7	8
4	3	5	5	6	6	7	7	8

Théorème (J.)

$$m(\Sigma) \geq C_0(\Sigma) - 1$$

Plongements tendus de surfaces

Théorème (J.)

Si une surface compacte à bord Σ admet un plongement polyédral substantiel tendu dans R^n, alors $n \leq C_0(\Sigma) - 1$.

Plongements tendus de surfaces

Théorème (J.)

Si une surface compacte à bord Σ admet un plongement polyédral substantiel tendu dans R^n, alors $n \leq C_0(\Sigma) - 1$.

Théorème (J.)

Si Σ est une surface close orientable de genre ≤ 2, ou non orientable de genre ≤ 3, alors pour tout entier $p > 0$, Σ_p admet un plongement polyédral substantiel et tendu dans $R^{C_0(\Sigma_p)-1}$ dont tous les sommets sont sur $\partial\Sigma$.

Critères de plongements tendus

Lemme (Banchoff)

Une surface polyédrale tendue contient le 1-squelette du bord de son envelope convexe.

Lemme (Kühnel)

Une surface polyédrale à faces convexes est tendue si et seulement si son 1-squelette est tendu.

Lemme (Kühnel)

Un graphe G est tendu si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. *Le graphe G contient le 1-squelette de son enveloppe convexe ;*
2. *tout sommet de G qui n'est pas un point extrême de l'enveloppe convexe de G est contenu dans l'enveloppe convexe de ses voisins.*

Critères de plongements

Lemme (Kühnel)

Pour toute surface polyédrale Σ à bord, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La surface est fortement tendue ;*
2. *La surface est tendue et tous les points extrêmes de sont enveloppe convexe sont situés sur son bord.*

Lemme (Grünbaum)

Le 1-squelette d'un polytope convexe de dimension d admet comme sous graphe une subdivision du graphe complet à $d+1$ sommets.

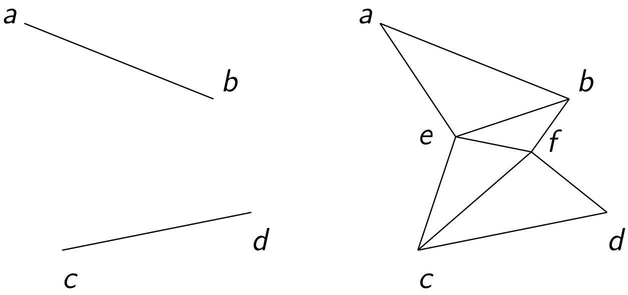
Construction canonique

Si Σ est triangulée par un plongement propre du graphe complet K_{n+1}, on obtient un plongement polyédral substantiel et fortement tendu de Σ dans R^n de la manière suivante :

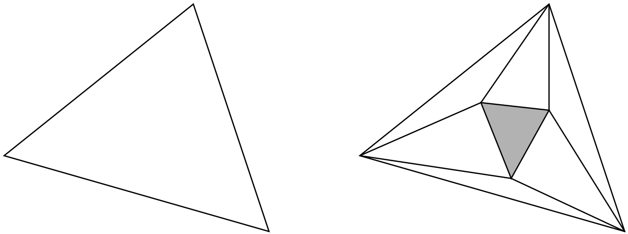
- on envoie K_{n+1} sur le squelette d'un $n+1$-simplexe de R^n ;
- on envoie chaque triangle de la triangulation sur le triangle correspondant du simplexe.

Adjonction d'anse

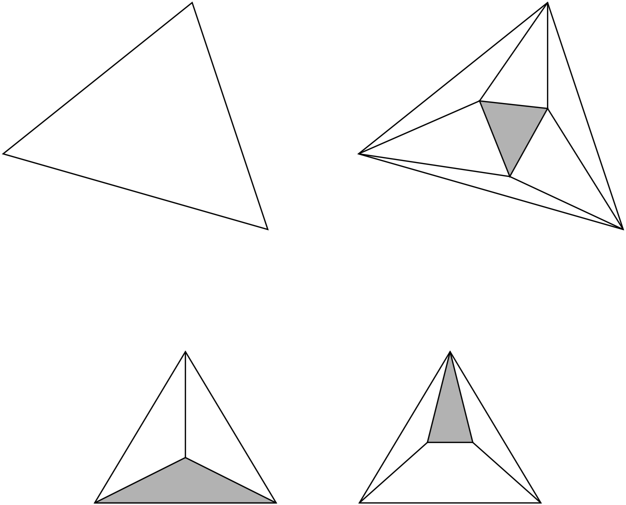
Adjonction d'anse



Création d'un bord

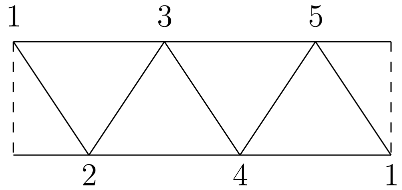


Création d'un bord



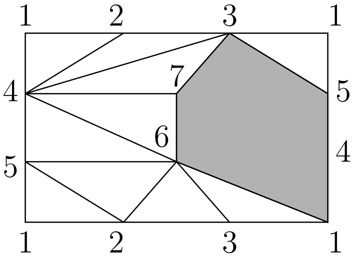
Exemples de plongements

Ruban de Möbius



Exemples de plongements

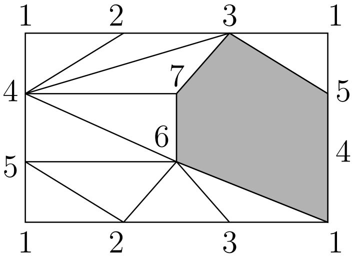
Bouteille de Klein



- On plonge K_6 dans la bouteille de Klein.

Exemples de plongements

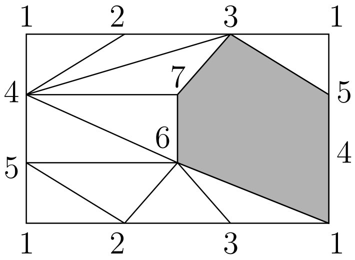
Bouteille de Klein



- On plonge K_6 dans la bouteille de Klein.
- On enlève le pentagone 14536 pour obtenir une triangulation.

Exemples de plongements

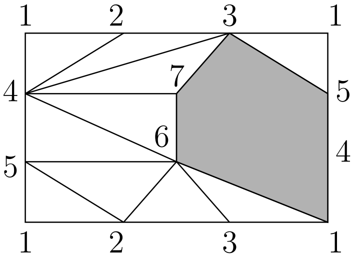
Bouteille de Klein



- On plonge K_6 dans la bouteille de Klein.
- On enlève le pentagone 14536 pour obtenir une triangulation.
- On applique la construction canonique.

Exemples de plongements

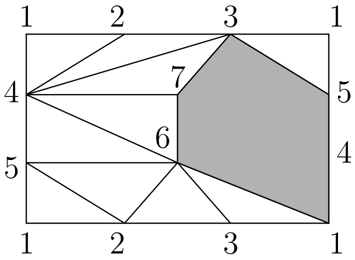
Bouteille de Klein



- On plonge K_6 dans la bouteille de Klein.
- On enlève le pentagone 14536 pour obtenir une triangulation.
- On applique la construction canonique.
- On ajoute le sommet 7 pour éviter la double arête 36.

Exemples de plongements

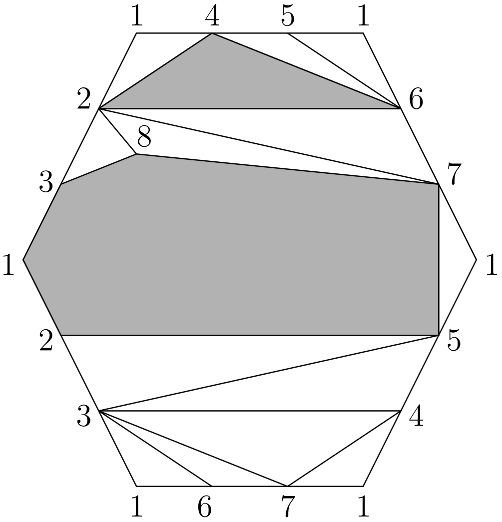
Bouteille de Klein



- On plonge K_6 dans la bouteille de Klein.
- On enlève le pentagone 14536 pour obtenir une triangulation.
- On applique la construction canonique.
- On ajoute le sommet 7 pour éviter la double arête 36.
- On ajoute un trou pour placer le sommet 2 sur le bord.

Exemples de plongements

La surface de caractéristique -1



Bibliographie (1890-1950)

- P. J. Heawood – « Map-colour theorem », *Quart. J. Pure Appl. Math.* **24** (1890), no. 96.
- L. Heffter – « Ueber das Problem der Nachbargebiete », *Math. Ann.* **38** (1891), no. 4, p. 477–508.
- H. Tietze – « Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen » *Jahresber. Deutcsch. Math. Vereinigung* **8** (1910) p. 155–159.
- P. Franklin « A Six Colour Problem », *J. Math. Phys.* **13** (1934) p. 363-369.
- I. N. Kagno – « A note on the Heawood color formula », *J. Math. Phys.* **14** (1935), p. 228–231.
- R. C. Bose – « On the construction of balanced incomplete block designs », *Ann. Eugenics* **9** (1939), p. 353–399.
- H. S. M. Coxeter – « The map-coloring of unorientable surfaces », *Duke Math. J.* **10** (1943), p. 293–304.

Bibliographie (1950-1980)

- G. Ringel – « Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes » *J. Reine Angew. Math.* **190**, (1952) p. 129–147.
- G. Ringel – « Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$ » *J. Reine Angew. Math.* **193**, (1954) p. 11–38.
- T. F. Banchoff – « Tightly embedded 2-dimensional polyhedral manifolds », *Amer. J. Math.* **87** (1965), p. 462–472.
- G. Ringel & J. W. T. Youngs – « Solution of the Heawood map-coloring problem », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), p. 438–445.
- G. Ringel – *Map color theorem*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 209, Springer Verlag, 1974.
- W. Kühnel – « Tight and 0-tight polyhedral embeddings of surfaces », *Invent. Math.* **58** (1980), no. 2, p. 161–177.

Bibliographie (1987-2017)

- Y. Colin de Verdière – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.* **20** (1987), no. 4, p. 99–615.
- B. Sévennec – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.* **324** (2002), no. 1, p. 195–211.
- J. – « Prescription du spectre de Steklov dans une classe conforme », *Anal. PDE* **7** (2014), no. 3, p. 529–550.
- J. – « Multiplicité du spectre de Steklov sur les surfaces et nombre chromatique », *Pacific J. Math.* **282** (2016), no. 1, p. 145–171.