

Chapitre 1

Quelques propriétés des champs de vecteurs génériques

Ludovic Rifford

Nous proposons une introduction à l'étude des systèmes dynamiques continus à travers la présentation d'un théorème de densité dû à Charles Pugh.

1.1 Introduction

Nous nous intéressons dans ce texte aux systèmes dynamiques continus donnés par le flot d'un champ de vecteurs autonome sur une variété différentielle. Ces objets trouvent leur origine dans l'étude des premières équations différentielles apparues avec l'essor de l'analyse aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles. Pour reprendre les mots du mathématicien russe Yulij Ilyashenko cités par Étienne Ghys [7] dans sa présentation des travaux du médaillé Fields Artur Avila en 2014, on peut considérer que leur histoire peut être divisée en trois périodes : Une première période initiée par Isaac Newton pendant laquelle "on se donne une équation différentielle et on essaye de trouver ses solutions", une deuxième période dans la lignée des travaux de Henri Poincaré au début du XX^{ème} siècle où l'on cherche plutôt des réponses qualitatives au problème "on se donne une équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions" et une troisième période typique des travaux de Stephen Smale ou Artur Avila dans laquelle "on ne se donne pas d'équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions". C'est ce dernier type de problème qui va nous s'intéresser, décrire certaines des propriétés vérifiées par des champs de vecteurs

génériques dans l'ensemble de tous les champs. Cependant, étant donné qu'il est difficile de présenter les travaux les plus récents dans ce domaine de manière très accessible dans un format court, nous allons présenter des résultats de généricité plus anciens et nous concentrer sur un théorème de densité démontré par Charles Pugh dans les années soixante.

Nous allons considérer dans ce texte des champs de vecteurs définis sur des variétés différentielles de classe C^∞ . Nous n'allons pas détailler ici la notion de variété différentielle - nous renvoyons par exemple le lecteur au premier chapitre très court du formidable livre de John Milnor *Topology from the differential viewpoint* [14] ou à d'autres références plus complètes de géométrie différentielle telles que [12] - mais disons que le lecteur pourra considérer que les variétés considérées correspondent à \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$ dans le cas non-compact et à la sphère ou au tore de dimension $n \geq 1$ dans le cas compact. Il en sera de même pour la plupart des résultats présentés, nous les énoncerons, les expliquerons, donnerons parfois une idée de leur preuve, et nous redirigerons le lecteur vers des références précises pour plus de détails.

1.2 Orbites et flot d'un champ de vecteur

Donnons-nous M une variété différentielle de classe C^∞ de dimension $n \geq 1$, qui comme on l'a dit pourrait être un espace non compact comme \mathbb{R}^n ou un espace compact comme la sphère S^n ou le tore \mathbb{T}^n de dimension n , et un *champ de vecteurs autonome*, c'est à dire ne dépendant pas du temps, X sur l'espace d'état M qui correspond à la donnée en chaque point x de M d'un vecteur vitesse $X(x)$ tangent à M en x que devrait suivre une trajectoire passant en x . Étant donné un couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$, on appelle *Problème de Cauchy* en (t_0, x_0) le problème qui consiste à étudier les solutions de l'équation différentielle associée à X ayant pour condition initiale x_0 au temps t_0 ou en d'autres termes les solutions de

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = X(x(t)) \quad \forall t \in I,$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle contenant t_0 . Le théorème suivant, fondamental, garantit l'existence d'une solution locale d'un problème de Cauchy unique sur son domaine dans le cas d'un champ de vecteurs suffisamment régulier :

Théorème 1.2.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur M et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ fixé. Alors il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une fonction $x : I \rightarrow M$ de classe C^1 solution du problème de Cauchy sur I . De plus, cette solution est unique sur son domaine, ce*

qui signifie que si une fonction $y : J \rightarrow M$ de classe C^1 est solution du même problème de Cauchy sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 , alors $y(t) = x(t)$ pour tout t dans $I \cap J$.

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz peut se démontrer essentiellement de deux façons, soit en obtenant la solution locale comme solution d'un problème de point fixe (voir [17, Theorem 3.1 p. 141]), soit en l'obtenant par la méthode d'Euler de la manière suivante (voir [4, Chapitre V]). Étant donné un intervalle $[a, b]$, avec $a = t_0$ et $b > t_0$, et un entier $N > 0$, on considère la subdivision uniforme $\pi_N = \{t_0 < \dots < t_N\}$ de $[a, b]$ donnée par

$$t_i := a + \frac{(b-a)i}{N} \quad \forall i = 0, \dots, N,$$

et on définit la courbe $x^N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par induction en posant (on suppose pour simplifier que $M = \mathbb{R}^n$)

$$x^N(t_0) := x_0, \quad x^N(t) := x_0 + (t - t_0)X(x_0) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, puis une fois que x^N a été défini sur $[t_0, t_i]$ (avec $i < N$),

$$x^N(t) := x(t_i) + (t - t_i)X(x(t_i)) \quad \forall t \in [t_{i+1}, t_i]$$

sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, voir Figure 1.1.

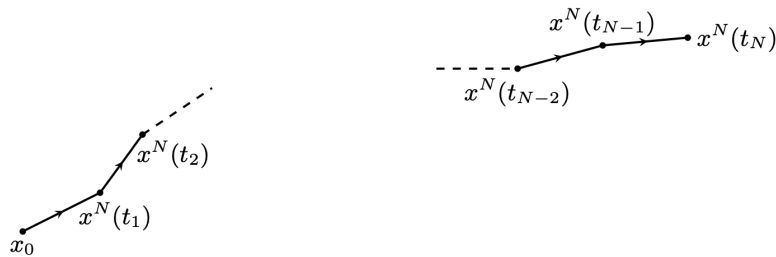


FIGURE 1.1 – Méthode d'Euler

Par construction, comme chaque courbe $x^N : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\dot{x}^N(t) = X(x(t_i))$ sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ et $X(x(t_i))$ se rapproche de $X(x(t))$ quand $t_{i+1} - t_i = (b-a)/N$ tend vers 0, la suite (x^N) produit une suite de solutions approchées de plus en plus fines du problème de Cauchy considéré. On peut montrer, en utilisant la continuité du champ X et un théorème d'analyse *ad hoc* (voir [4, Théorème d'Ascoli p. 136], que si b est suffisamment proche de a la suite (x^N) converge uniformément, quand le

pas de la subdivision tend vers 0 c'est à dire quand $N \rightarrow +\infty$, vers une solution exacte du problème de Cauchy sur $[a, b]$. Comme on peut reproduire cette construction sur un intervalle du type $[c, a]$ avec $c < a = t_0$ en travaillant en temps rétrograde, on obtient le résultat d'existence locale sur un intervalle fermé contenant t_0 dans son intérieur. La propriété d'unicité du Théorème de Cauchy-Lipschitz est quant à elle une conséquence de la régularité C^1 du champ et du résultat suivant :

Lemme 1.2.2 (Lemme de Gronwall). *Soit $\epsilon > 0$, $u : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et deux constantes $\alpha, \beta \geq 0$ telles que*

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds \quad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Alors on a

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Ce lemme d'analyse facile joue un rôle considérable en théorie des équations différentielles et plus généralement en calcul différentiel. Sa démonstration s'effectue simplement en notant que si on définit la fonction $\mu : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mu(t) := \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$

alors l'hypothèse du lemme implique

$$\dot{\mu}(t) = \beta u(t) \leq \beta \mu(t) \quad \forall t \in [0, \epsilon]$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left\{ e^{-\beta t} \mu(t) \right\} = e^{-\beta t} (\dot{\mu}(t) - \beta \mu(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$

ce qui par intégration donne

$$u(t) \leq \mu(t) \leq \mu(0) e^{\beta t} = \alpha e^{\beta t} \quad t \in [0, \epsilon].$$

Toute solution d'un problème de Cauchy en (t_0, x_0) (pour un champ X de classe C^1 sur M) peut être étendue de manière unique en une *solution maximale* définie sur un intervalle maximal pour l'inclusion de la forme $] \alpha, \beta [$ avec $\alpha < t_0 < \beta$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Par exemple, si on considère, dans $M = \mathbb{R}$, le champ $X(x) = x$ alors la solution maximale du problème de Cauchy en $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par

$$x(t) = e^{(t-t_0)} x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et est définie sur \mathbb{R} ; alors que si on prend $X(x) = 1 + x^2$, la solution maximale du problème de Cauchy en $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ donnée par

$$x(t) = \tan(t - t_0 + \arctan(x_0)) \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ t_0 - \arctan(x_0)$$

n'est pas définie au delà des temps $-\pi/2 + t_0 - \arctan(x_0)$ et $\pi/2 + t_0 - \arctan(x_0)$ où elle explose. Certaines hypothèses supplémentaires permettent en fait d'assurer que toutes les solutions maximales d'un champ donné sont définies sur \mathbb{R} , c'est par exemple le cas de tout champ de vecteurs (de classe C^1) défini sur une variété compacte ou des champs bornés dans \mathbb{R}^n ; de tels champs sont dits *complets*.

Étant donné un champ de vecteurs X de classe C^1 sur M supposé complet, la *trajectoire* d'un point $x_0 \in M$ est la solution maximale $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ du problème de Cauchy en $(0, x_0)$, ses *orbites positive* et *négative* sont respectivement définies par

$$\mathcal{O}^+(x_0) := \{x(t) \mid t \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^-(x_0) := \{x(t) \mid t \leq 0\}$$

et son *orbite*, tout court, est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x_0) := \mathcal{O}^+(x_0) \cup \mathcal{O}^-(x_0) = \{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on définit le *flot* du champ X comme l'application

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times M \longmapsto \varphi_t(x) := x(t) \in M,$$

où $x(t)$ est la solution maximale du problème de Cauchy en $(0, x)$. Le flot, noté $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ou simplement (φ_t) , jouit de la même régularité que le champ X (c'est une conséquence du Lemme de Gronwall ci-dessus) et vérifie la propriété de groupe suivante

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

On vérifie ainsi que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'application $\varphi_t : M \rightarrow M$ est de classe C^1 et bijective d'inverse $\varphi_{-t} : M \rightarrow M$ également de classe C^1 , c'est donc un difféomorphisme de classe C^1 de M dans M ; $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définit ce qu'on appelle un *groupe à un paramètre de difféomorphismes sur M* . Parmi toutes les orbites, certaines jouent un rôle fondamental en théorie des systèmes dynamiques, ce sont les orbites compactes. L'orbite d'un point $x \in M$ sous l'action d'un champ X est dite *compacte* si l'ensemble $\mathcal{O}(x)$ est un sous-ensemble compact de M , dans ce cas il existe un temps $t > 0$ tel que $\varphi_t(x) = x$ et on peut distinguer deux cas :

- Si $\varphi_t(x) = x$ pour tout $t \geq 0$, alors on a

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}^-(x) = \{x\} \quad \text{et} \quad X(x) = 0,$$

un tel point est appelé *point d'équilibre* du système et *point singulier* du champ de vecteurs X .

- Sinon il existe un temps minimal $T > 0$ tel que $\varphi_T(x) = x$ et on a

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}^-(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \in [0, T[]\}$$

$$\text{et} \quad \varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

on dit que x est un *point périodique de période T* et que son orbite est *périodique*.

Terminons cette section par quelques exemples.

Exemple 1.2.3 (Cas linéaire). *Le cas linéaire correspond à un champ de vecteurs dans \mathbb{R}^n du type*

$$X(x) = Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où A est une matrice carrée de taille n . La solution du problème de Cauchy en $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$x(t) = \exp((t - t_0)A) x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

où $\exp((t - t_0)A)$ désigne l'exponentielle de la matrice $(t - t_0)A$. On note que $x = 0$ ainsi que tous les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Ax = 0$ sont des points d'équilibre du système.

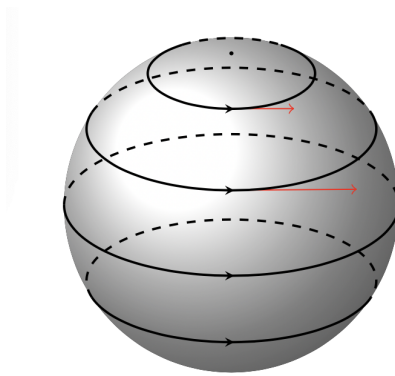
Exemple 1.2.4 (Un champ de vecteurs sur S^2). *Dans le cas où M est la sphère unité S^2 dans \mathbb{R}^3 définie par*

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

on peut par exemple considérer un champ de vecteurs dont le flot correspond à tourner à vitesse constante le long des cercles de latitude constante (voir Figure 1.2). Un tel champ est de la forme

$$X(x) = \psi(x_3) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in M$$

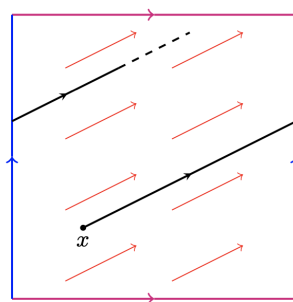
avec $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si ψ ne s'annule pas sur $] -1, 1[$, les pôles nord $(0, 0, 1)$ et sud $(0, 0, -1)$ sont les seuls points d'équilibres du système et tous les cercles de latitude constante hors des pôles sont des orbites périodiques du flot.

FIGURE 1.2 – Flot sur S^2

Exemple 1.2.5 (Champs constants sur \mathbb{T}^2). *Le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ peut être visualisé de différentes manières. On peut le voir comme une surface de révolution dans \mathbb{R}^3 en forme de bouée ou comme le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans lequel on identifie les bords horizontaux et verticaux (voir Figure 1.3) ce qui revient à quotienter le plan \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence $x \sim y$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x - y = k$. Un champ de vecteurs constant sur \mathbb{T}^2 de la forme $X(x) = v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ induit un flot donné par (voir Figure 1.3)*

$$\varphi_t(x) = (\{x_1 + tv_1\}, \{x_2 + tv_2\}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2,$$

où $\{a\} := a - \lfloor a \rfloor$ désigne la partie fractionnaire du réel a . Si v_1 et v_2 sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} (ou de manière équivalente sur \mathbb{Z}), alors toutes les trajectoires seront denses dans \mathbb{T}^2 et dans le cas contraire toutes les orbites seront périodiques.

FIGURE 1.3 – Flot sur \mathbb{T}^2

Exemple 1.2.6 (Champs sur \mathbb{T}^n). *Le tore \mathbb{T}^n avec $n \geq 1$ correspond au produit de n copies du cercle S^1 ou de manière équivalente au quotient de \mathbb{R}^n par \mathbb{Z}^n . Il est intéressant de noter qu'un champ de vecteurs X sur \mathbb{T}^n n'est rien d'autre que la*

restriction à \mathbb{T}^n d'un champ de vecteurs \tilde{X} sur \mathbb{R}^n de classe C^1 et \mathbb{Z}^n -périodique sur \mathbb{R}^n c'est à dire tel que $\tilde{X}(x+k) = \tilde{X}(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{Z}^n$. On dit que \tilde{X} est le relevé du champ X sur \mathbb{R}^n .

1.3 Portraits de phases locaux

Le portrait de phase d'un champ de vecteurs X de classe C^1 sur M correspond à la description de l'ensemble de ses trajectoires (ou orbites) comme dans la Figure 1.2. On peut sous certaines hypothèses décrire localement les trajectoires du système dynamique continu donné par le flot de X en le conjuguant localement à un système plus simple. Comme on va énoncer uniquement des résultats locaux, on peut sans perte de généralité supposer qu'on dispose d'un champ de vecteurs complets de classe C^1 dans $M = \mathbb{R}^n$. Si on se donne un autre champ de vecteurs complet Y de classe C^1 dans \mathbb{R}^n de flot noté $(\tilde{\varphi}_t)$, un ouvert U de M , un ouvert V de \mathbb{R}^n et une bijection $h : U \rightarrow V$, alors on dit que h conjugue localement les flots (φ_t) (le flot de X dans M) et $(\tilde{\varphi}_t)$ si on a

$$\tilde{\varphi}_t(y) = \left(h \circ \varphi_t \circ h^{-1} \right) (y)$$

pour tout $y \in V$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\varphi}_s(y) \in V$ pour tous $s \in [0, t]$. Dans ce cas, h envoie les orbites de φ_t sur les orbites de $(\tilde{\varphi}_t)$ et si de plus h est au moins de classe C^1 alors on a

$$Y(h(x)) = d_x h(X(x)) \quad \forall x \in U.$$

Les résultats de conjugaisons locales distinguent deux types de points, les points *réguliers* du champ pour lesquels X ne s'annule pas et les points *singuliers* où X s'annule.

Le problème de conjugaison locale dans le cas d'un point régulier est facile, on a le résultat suivant (voir Figure 1.4 et [9, §2 p. 242]) :

Proposition 1.3.1 (Théorème de redressement ou Boite à flot). *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur M et x un point régulier de X c'est à dire tel que $X(x) \neq 0$, alors il existe un ouvert U de M contenant x , un ouvert V de \mathbb{R}^n de la forme $V =]0, \tau[\times B$ avec $\tau > 0$ et $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ une boule ouverte centrée en 0 et un difféomorphisme de classe C^1*

$$h : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

qui conjugue localement le flot (φ_t) de X au flot du champ de vecteurs constant égal à e_1 (premier vecteur dans la base canonique de \mathbb{R}^n).

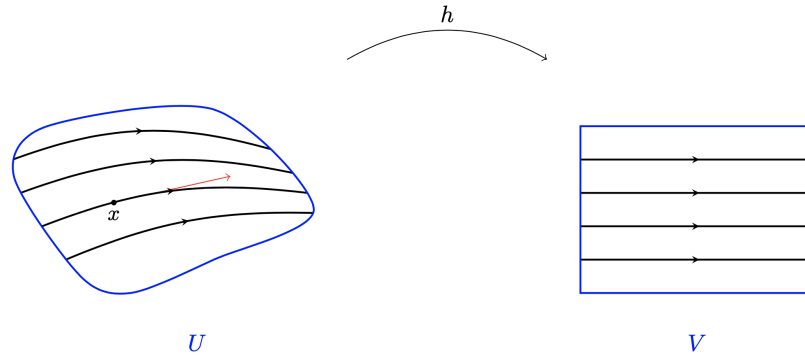


FIGURE 1.4 – Boite à flot

Le cas d'un point singulier, beaucoup plus délicat, nécessite une hypothèse supplémentaire. On dit qu'un point singulier $x \in M = \mathbb{R}^n$ de X , c'est à dire tel que $X(x) = 0$, est *hyperbolique* si le champ linéarisé en ce point n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire, ce qui signifie que la différentielle de X en x , qu'on peut voir comme une matrice carrée $D_x X$ de taille n , n'a pas de valeurs propres de partie réelle nulle. On a le résultat suivant (voir [17, §5.7.2 p. 165]) :

Théorème 1.3.2 (Théorème de Hartman-Grobman). *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur $M = \mathbb{R}^n$ et x_0 un point singulier hyperbolique de X . Alors il existe un ouvert U de M contenant x_0 , un ouvert V de \mathbb{R}^n contenant l'origine et un homéomorphisme*

$$h : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

qui conjugue localement le flot (φ_t) de X au flot du champ de vecteurs linéarisé $Y(x) = D_{x_0} X(x)$.

Ce résultat permet de classifier, à homéomorphisme près, les portraits de phase de champs de vecteurs aux voisinages de singularités hyperboliques. Dans le cas du plan par exemple, la matrice correspondant au champ linéarisé de X en x (un point singulier de X supposé hyperbolique) peut avoir deux valeurs propres complexes conjuguées (de partie réelle non-nulle), deux valeurs propres réelles (non-nulles) de mêmes signes ou deux valeurs propres réelles (non-nulles) de signes distincts, chacun de ces cas correspondant à un comportement local spécifique des trajectoires du champ. Le dernier cas correspond par exemple à un champ du type

$$X(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + R(x) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

avec R un champ de classe C^1 négligeable par rapport à la partie linéaire en 0 c'est à dire tel que $R(0) = 0$ et $D_0R = 0$. Le théorème de Hartman-Grobman dit qu'il existe une bijection continue d'un voisinage ouvert de 0 dans un voisinage ouvert de 0, d'inverse continu, ce qu'on appelle un homéomorphisme, qui envoie les trajectoires du champ X sur les trajectoires du champ linéaire

$$Y(x) = Ax \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

données par (voir Figure 1.5)

$$\tilde{\varphi}_t(x) = \begin{pmatrix} e^{-t}x_1 \\ e^t x_2 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

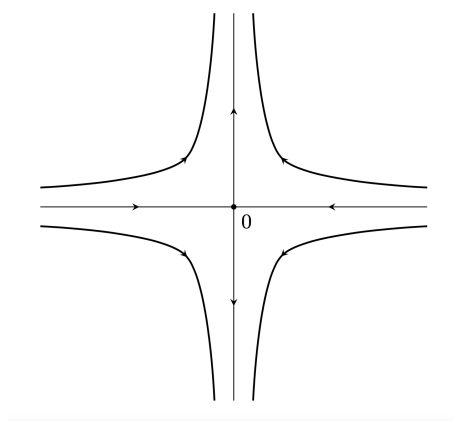


FIGURE 1.5 – Portrait de phase local d'un champ linéaire dans le plan

On observe dans ce cas (voir Figure 1.5) qu'on a deux trajectoires qui tendent vers le point d'équilibre en $+\infty$ (les trajectoires vivant sur l'axe horizontal) et deux trajectoires qui tendent vers le point d'équilibre en $-\infty$ (les trajectoires vivant sur l'axe vertical), ce type de comportement est typique des points d'équilibre hyperboliques. Si x est un point singulier hyperbolique d'un champ X dans $M = \mathbb{R}^n$, on peut factoriser le polynôme caractéristique de $A = D_x X$ en un produit de deux polynômes réels P^s et P^u , l'un dont les racines sont de partie réelle strictement négative et l'autre dont les racines sont de partie réelle strictement positive, et ainsi voir l'espace tangent à X en x comme la somme directe

$$T_x M = \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u,$$

où E^s est l'espace stable correspondant aux directions qui sont dans le noyau de $P^s(A)$ et E^u est l'espace instable correspondant aux directions qui sont dans le noyau de $P^u(A)$. De plus, on peut définir l'ensemble

$$W^s(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(y) = x \right\}$$

appelé *variété stable* de x et l'ensemble

$$W^u(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(y) = x \right\}.$$

appelé *variété instable* de x . On renvoie le lecteur à [10, Chapter 6] pour la démonstration du théorème suivant et de tous ses avatars.

Théorème 1.3.3 (Théorème de la variété stable). *Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 dans M et x un point singulier hyperbolique de X . Alors la variété stable $W^s(x)$ est une variété immergée de classe C^1 tangente à E^s en x et la variété instable $W^u(x)$ est une variété immergée de classe C^1 tangente à E^u en x . Voir Figure 1.6.*

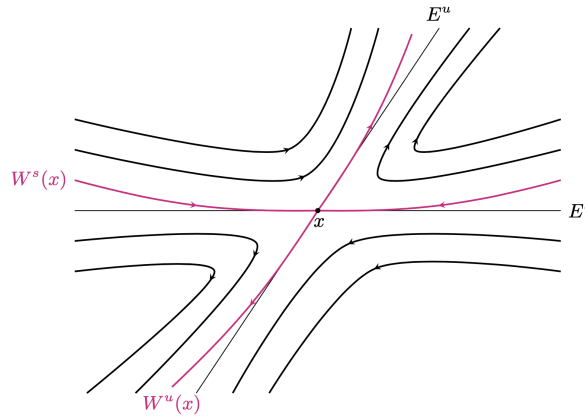


FIGURE 1.6 – Variétés stables et instables locales

Les résultats présentés ci-dessus dans le cas de points singuliers hyperboliques d'un champ de vecteurs peuvent être adaptés au cas d'orbites périodiques hyperboliques en considérant une application de premier retour. Considérons un point périodique x de période $T > 0$ d'un champ de vecteurs X de classe C^1 dans M et un bout d'hypersurface (par exemple une boule ouverte de dimension $n - 1$) Σ de classe C^∞ contenant x et transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x)$ c'est à dire telle que le vecteur non-nul $X(x)$ ne soit pas

tangent à Σ (voir Figure 1.7). On appelle *application de premier retour*, ou *application de Poincaré*, sur Σ , l'application

$$\Pi_{\Sigma} : \Sigma \longrightarrow \Sigma$$

qui envoie un point $y \in \Sigma$ sur le premier point de l'orbite positive de y , de la forme $\varphi_t(y)$ avec $t > 0$, tel que $\varphi_t(y) \in \Sigma$. Comme $\varphi_T(x) = x$ et Σ est transverse à $\mathcal{O}(x)$, l'application Π_{Σ} fixe le point x et est bien définie de classe C^1 dans un voisinage de x dans Σ (voir Figure 1.7).

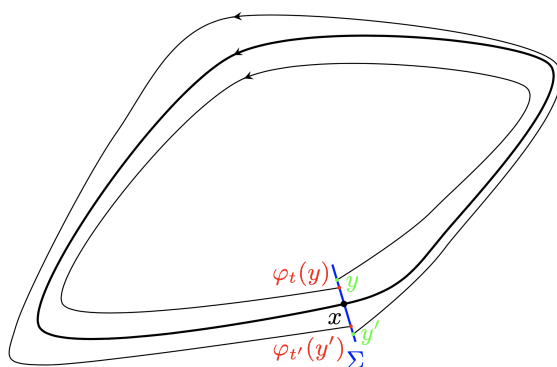


FIGURE 1.7 – Application de premier retour

Le point périodique x et son orbite sont dits *hyperboliques* si l'application de premier retour Π_{Σ} a une différentielle en x qui n'admet pas de valeur propre sur le cercle unité. Dans ce cas, on peut décomposer les espaces tangents le long de $\mathcal{O}(x)$ en sommes directes d'espaces stables et instables et montrer que ceux-ci sont tangents à des variétés dites stables et instables immergées dans M , on renvoie par exemple le lecteur à [10, Chapter 6] pour plus de détails.

1.4 Aspect topologique

Il est intéressant de noter que la forme de la variété M considérée contraint la présence éventuelle de singularités d'un champ de vecteurs de classe C^1 sur M . En suivant la présentation faite par John Milnor dans [14], nous allons énoncer un résultat qui nécessite de supposer M compact et requiert l'introduction de deux notions : la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété compacte et l'indice d'un point d'équilibre.

La caractéristique d'Euler-Poincaré est un invariant topologique basé sur la formule d'Euler pour les polyèdres. Donnons-nous M une variété compacte de classe C^∞ et de dimension $n \geq 1$, plongeons-la dans un espace euclidien \mathbb{R}^N (voir [8, §5. The Whitney Embedding Theorem]) et approchons-la par un polyèdre $P_M \subset \mathbb{R}^N$ de manière à ce que P_M soit homéomorphe à M , on appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* le nombre entier

$$\chi(M) := \sum_{f \in F(P_M)} (-1)^{\dim(f)},$$

où $F(P_M)$ désigne l'ensemble des faces dont P_M est la partition et $\dim(f)$ est la dimension d'une face $f \in F(P_M)$ donnée. On peut montrer que le nombre ainsi obtenu ne dépend ni du plongement considéré ni du polyèdre approximant considéré, c'est un invariant topologique de M , toute variété et tout polyèdre homéomorphe à M a la même caractéristique d'Euler-Poincaré que M . Par exemple, le cercle S^1 est homéomorphe au bord du carré $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ lui-même union de 4 faces de dimension 1 et de 4 faces de dimension 0, on a donc $\chi(S^1) = 0$, la sphère S^2 est homéomorphe au bord du cube $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$, on a donc $\chi(S^2) = 2$, le tore \mathbb{T}^2 est homéomorphe au tore de révolution de \mathbb{R}^3 qui est homéomorphe au tore de révolution à section carré, on vérifie donc facilement que $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$. On renvoie le lecteur au formidable site web Analysis Situs [3] pour plus de détails sur la topologie des variétés en général.

Passons maintenant à l'indice d'un point d'équilibre pour lequel on suit précisément la présentation de John Milnor dans [?]. Pour cela, commençons par considérer une fonction $f : S^k \rightarrow S^k$ de classe C^∞ sur la sphère S^k de dimension $k \geq 1$ et x un point de S^k où l'application linéaire $D_x f : T_x S^k \rightarrow T_x S^k$ est inversible. Dans ce cas on dira que le *signe* de $D_x f$ est $+1$ si l'image d'une base de $T_x S^k$ augmentée du vecteur $f(x)$ a la même orientation que la base de départ augmentée de x et que le signe est -1 dans le cas contraire. On peut noter que si on étend la fonction f en une fonction homogène $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ de degré 1 par ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^k)

$$\tilde{f}(z) := |z|f(z/|z|) \quad \forall z \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\},$$

alors $D_x f$ vaut $+1$ si la différentielle de \tilde{f} en x est de déterminant positif et -1 sinon (noter que $D_x \tilde{f}$ est inversible donc de déterminant non-nul). On appelle *valeur régulière* de f tout $y \in S^k$ tel que $D_x f : T_x S^k \rightarrow T_x S^k$ est inversible pour tout $x \in f^{-1}(y)$ et on définit alors le *degré de Brouwer* de f

en une valeur régulière $y \in \mathbb{S}^k$ le nombre entier

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(D_x f).$$

On peut montrer qu'en fait l'entier $\deg(f; y)$ ne dépend pas de la valeur régulière y considérée et que la plupart des points de $f(\mathbb{S}^k)$ sont des valeurs régulières (c.f. Théorème de Sard dans [14, §2.] ou [8, Chapter II]), cela permet de définir le *degré* de f comme le degré de Brouwer de ses valeurs régulières. Maintenant, étant donné un champ de vecteur X de classe C^∞ sur M et un point singulier isolé x du champ X , on appelle *indice* de x , noté $\text{ind}^X(x)$ le degré de l'application

$$f_x : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

définie par

$$f_x(u) = \frac{X(r u)}{|X(r u)|} \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n et $r > 0$ est suffisamment petit pour que X ne s'annule pas hors de x dans la boule centrée en x de rayon r (on peut bien-sûr montrer que l'indice ainsi défini ne dépend pas du petit $r > 0$ considéré).

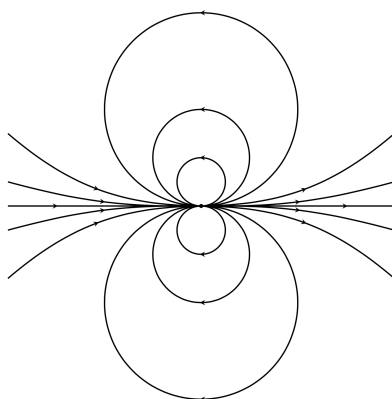


FIGURE 1.8 – Une singularité d'indice 2

Par exemple, si on considère dans \mathbb{R}^2 le champ X (voir Figure 1.8) défini par

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

alors $0 = (0, 0)$ est le seul point singulier de X et, en notant que $|X(x)| = |x|^2$ pour tous $x \in \mathbb{R}^2$, on vérifie que la fonction homogénéisée

$$\tilde{f}_0(x) = |x| \frac{X(x/|x|)}{|X(x/|x|)|} = \frac{1}{|x|} \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

a une jacobienne donnée par

$$\text{Jac}_x \tilde{f}_0 = \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} x_1(x_1^2 + 3x_2^2) & -x_2(x_2^2 + 3x_1^2) \\ 2x_2^3 & 2x_1^3 \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1,$$

de déterminant strictement positif. De plus, on peut noter que pour tout $y \in \mathbb{S}^1$ l'équation

$$X(x) = y;$$

a exactement deux solutions dans \mathbb{S}^1 . En effet, si $y = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, alors les solutions de $X(x) = y$ sont les $x = e^{i\alpha} \in \mathbb{S}^1$ tels que $\alpha \in [0, 2\pi[$ vérifie

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(\theta) \\ 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sin(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos(\theta) \\ \sin(2\alpha) = \sin(\theta), \end{cases}$$

soit $\alpha = \theta/2$ ou $\alpha = \pi + \theta/2$. Par conséquent, le point $0 = (0, 0)$ est d'indice 2.

Le résultat suivant établit un lien entre la topologie de M et les indices des points singuliers d'un champ de vecteur sur M , voir [?, p. 35].

Théorème 1.4.1 (Théorème de Poincaré-Hopf). *Soit M une variété compacte de classe C^∞ et X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M ayant un nombre fini de points singuliers x_1, \dots, x_k . Alors on a*

$$\sum_{i=1}^k \text{ind}^X(x_i) = \chi(M),$$

où $\chi(M)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de M .

Le Théorème de Poincaré-Hopf implique en particulier que tout champ de vecteurs continu sur une variété compacte de caractéristique d'Euler-Poincaré non-nulle admet au moins un point singulier, c'est par exemple le cas de toutes les sphères de dimension paires (dont la caractéristique vaut 2). De plus, on peut montrer qu'une variété compacte admet un champ de vecteurs sans point singulier si et seulement si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égal à 0 (voir [19, 39.8. p. 203]), ce sera par exemple le cas de

toutes les variétés compactes de dimension impaires et des tores en toute dimension. Dans le cas de la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, le champ $X : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ défini par

$$X(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

donne un tel champ tangent à S^3 ne s'annulant pas sur S^3 .

Le cas des orbites périodiques est beaucoup plus délicat, l'existence éventuel d'un théorème de type Poincaré-Hopf qui relierait le nombre et la nature des orbites périodiques d'un champ de vecteurs à la topologie de la variété ambiante fut l'un des enjeux principaux d'une conjecture célèbre due à Herbert Seifert. Cette conjecture posée sous forme de question dans un article en 1950 interrogeait l'existence systématique d'orbite périodique pour tout champ de vecteurs continu sur la sphère S^3 ; nous savons construire des champs sur S^3 sans point singulier mais peut-être que de tels champ ont nécessairement au moins une orbite périodique? Cette question fut répondue par la négative en 1974 par Paul Schweitzer qui montra comment construire un champ de vecteurs de classe C^1 sur S^3 sans orbite périodique, puis la régularité du contre-exemple fut successivement améliorée par Krystina Kuperberg en 1994 (champ de classe C^∞) et Greg et Krystina Kuperberg en 1996 (champ analytique). Nous renvoyons le lecteur au texte du Séminaire Bourbaki d'Étienne Ghys sur la conjecture de Seifert de juin 1994 [5] pour plus d'informations sur ce type de problèmes et une idées des constructions des contre-exemples.

1.5 Champs de vecteurs génériques

Cette section a pour objet d'introduire la notion de champ de vecteurs générique sur une variété compacte qui nécessite en premier lieu la construction d'une topologie sur l'ensemble des champs de vecteurs. Considérons d'abord le cas du tore \mathbb{T}^n de dimension $n \geq 1$. Comme on l'a dit dans l'Exemple 1.2.6, un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathbb{T}^n n'est rien d'autre qu'un champ de vecteurs de classe C^1 sur \mathbb{R}^n qui est \mathbb{Z}^n -périodique, c'est à dire tel que

$$X(x) = X(x + k) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

On peut donc définir une norme sur l'ensemble $\mathcal{X}^1(\mathbb{T}^n)$ des champs de vecteurs de classe C^1 sur \mathbb{T}^n en les identifiant aux champs \mathbb{Z}^n -périodiques

de \mathbb{R}^n et en posant pour tout champ X ,

$$\|X\|_{C^1} := \sup_{x \in [0,1]^n} \{|X(x)|\} + \sup_{x \in [0,1]^n} \{|D_x X|\},$$

de telle sorte que deux champs X et Y de $\mathcal{X}^1(\mathbb{T}^n)$ seront proches en topologie C^1 ssi la norme de leur différence $\|X - Y\|_{C^1}$ est petite. Dans le cas d'une variété compacte générale M de dimension $n \geq 1$, on procède de la manière suivante, on considère un nombre fini de cartes localement difféomorphes à \mathbb{R}^n dont l'union recouvre M , on définit une norme C^1 sur chaque carte comme ci-dessus, puis on définit une norme C^1 sur tout M en sommant les normes partielles construites sur chaque carte; on obtient de cette manière une norme, dite *norme C^1* et notée $\|\cdot\|_{C^1}$, sur l'ensemble $\mathcal{X}^1(M)$ des champs de vecteur de classe C^1 sur M qui fait de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{X}^1(M), \|\cdot\|_{C^1})$ un espace de Banach.

Rappelons qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit *de Banach* si il est complet pour la norme c'est à dire tel que toutes les suites de Cauchy dans E sont convergentes et, qu'en vertu du Théorème de Baire (voir [2, II.1. p. 15]), un espace de Banach est de Baire, ce qui signifie que toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E ou, de manière équivalente, que toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. On appelle *ensemble résiduel* dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout ensemble contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses, les ensembles résiduels sont donc des ensembles très denses qu'on peut voir comme des sous-ensembles de E réunissant les éléments sur lesquels on devrait tomber si on pouvait choisir un élément au hasard dans E .

Une fois l'espace de Banach $(\mathcal{X}^1(M), \|\cdot\|_{C^1})$ construit, on dit qu'un champ $X \in \mathcal{X}^1(M)$ est *générique* s'il est inclus dans un ensemble résiduel de $\mathcal{X}^1(M)$. On dira par exemple qu'une propriété (P) est vérifiée pour des champs génériques si il existe un certain ensemble résiduel \mathcal{G} dans $\mathcal{X}^1(M)$ tel que tout élément de \mathcal{G} vérifie la propriété (P). En guise d'introduction à la genericité on peut citer le résultat facile suivant :

Proposition 1.5.1. *Étant donnée une variété compacte M (de classe C^∞), l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \mathcal{X}^1(M)$ vérifiant les deux propriétés suivantes est résiduel dans $\mathcal{X}^1(M)$:*

- (P1) *Tout point singulier de X est hyperbolique.*
- (P2) *Tout orbite périodique de X est hyperbolique.*

Cette proposition peut être obtenue comme conséquence assez directe de résultats de théorie de la transversalité (voir [8, Chapter II]) mais on peut aussi la démontrer à la main. Le fait que l'ensemble des champs de

$\mathcal{X}^1(M)$ vérifiant (P1) est résiduel découle de deux types de résultats, un résultat de densité et d'un résultat de stabilité. La partie densité consiste à montrer qu'on peut perturber un champ X de \mathbb{R}^n ayant un point singulier en 0 en un champ \tilde{X} aussi proche qu'on veut en topologie C^1 ayant un point singulier hyperbolique en 0, il suffit pour cela d'ajouter à X un champ localement linéaire du type $R(x) = \psi(x)Bx$ où $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ constante dans un voisinage de 0 et nulle en dehors d'un ouvert un peu plus gros et B est une matrice carré de taille n telle que la matrice $D_x X + \psi(0)B$ est hyperbolique. La partie stabilité revient elle à montrer qu'une perturbation suffisamment petite en topologie C^1 d'un champ dont tous les points singuliers sont hyperboliques est un champ ayant cette même propriété, ceci est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites et du fait que les différentielles du champ aux points singuliers sont inversibles. La démonstration pour (P2) suit à peu près le même schéma avec toutefois une différence notable due au fait qu'un champ vérifiant (P1) a un nombre fini de points singuliers alors qu'un champ vérifiant (P2) peut avoir un nombre dénombrable infini d'orbites périodiques.

1.6 Le Closing Lemma de Pugh

Supposons la variété M compacte, donnons-nous un champ de vecteurs X de classe C^1 sur M , fixons un point $x \in M$ et introduisons quelques définitions :

- On appelle *ensemble ω -limite* de x l'ensemble $\omega(x)$ des valeurs d'adhérence de toutes les suites $\varphi_{t_k}(x)$ où $\{t_k\}$ tend vers $+\infty$.
- On appelle *ensemble α -limite* de x l'ensemble $\alpha(x)$ des valeurs d'adhérence de toutes les suites $\varphi_{t_k}(x)$ où $\{t_k\}$ tend vers $-\infty$.
- Le point x est dit *positivement récurrent* si $x \in \omega(x)$, *négativement récurrent* si $x \in \alpha(x)$ et *récurrent*, tout court, si x est positivement récurrent ou négativement récurrent.
- Le point x est dit *non-errant* ssi pour tout voisinage U de x dans M et tout $T > 0$, il existe $y \in U$ et $t > T$ tels que $\varphi_t(y) \in U$.

Il est clair qu'un point positivement récurrent est non-errant, il suffit pour cela de noter que si x est valeur d'adhérence d'une suite $\varphi_{t_k}(x)$ où $\{t_k\}$ tend vers $+\infty$ alors cette suite intersecte tout voisinage de x pour k assez grand. Il est également clair que si $x \in \omega(y)$ pour un certain $y \in M$ alors x est non-errant, car si x est égal à la limite d'une suite $\varphi_{t_k}(y)$ avec $\{t_k\} \rightarrow +\infty$

alors tout voisinage U de x contient deux points de cette suite

$$\varphi_{t_k}(y) \in U \quad \text{et} \quad \varphi_{t'_k}(y) = \varphi_{t'_k - t_k}(y) \in U$$

avec $t'_k - t_k$ aussi grand qu'on veut. Mais attention, un point x peut être non-errant tout en étant dans l'ensemble ω -limite d'aucun point de M . On peut voir cela en considérant par exemple dans \mathbb{R}^2 (qui n'est pas compact) le champ X défini par

$$X(x) = \psi(x) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

avec $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction de classe C^∞ s'annulant seulement au point $(1, 0)$, pour lequel tous les points du cercle unité hormis $(1, 0)$ vérifient cette propriété (on laisse le lecteur montrer comment adapter cet exemple dans S^2).

Le lemme de fermeture de Pugh, appelé Closing Lemma, affirme que l'orbite de tout point non-errant peut être fermée par une petite perturbation du champ en topologie C^1 . Avant d'énoncer le résultat, voyons comment démontrer facilement un tel résultat en topologie C^0 et pourquoi le passage en topologie C^1 n'est pas évident.

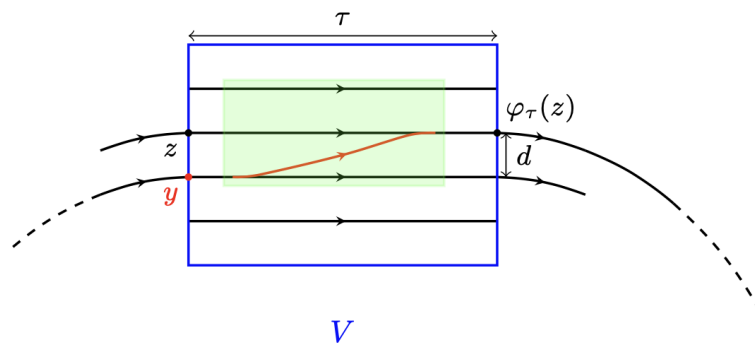


FIGURE 1.9 – Connection d'orbites

Donnons-nous un champ X de classe C^1 sur une variété compacte M et x un point non-errant (qui n'est ni un point d'équilibre ni un point périodique). Quitte à considérer une boîte à flot dans un voisinage U de x , on peut supposer que le champ X est donné par le champ constant égal à e_1 dans un voisinage cylindrique $V = [0, \tau] \times B$ (avec $\tau > 0$ et $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ une boule ouverte centrée en 0) de l'origine qu'on identifie à x (voir Figure

1.9). On prétend alors que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ \tilde{X} égal à X (vu dans la boîte à flot) hors de V tel que

$$\|\tilde{X} - X\|_{C^0} := \sup_{x \in V} \left\{ \left| \tilde{X}(x) - X(x) \right| \right\} < \epsilon$$

et pour lequel l'orbite de x est périodique. En effet, fixons $\epsilon > 0$. Comme x est non-errant, il existe pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, un point $z \in \{0\} \times B$, un temps $t > \tau$ et un réel $\nu > \delta$ tels que

$$|z| < \delta, \quad y := \varphi_t(z) \in \{0\} \times B, \quad |y| < \delta$$

et tels que pour tous $s \in (0, t)$,

$$\varphi_s(z) \in \{0\} \times B \implies |\varphi_s(z) - z| \geq \nu.$$

Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, les deux points $z = (0, \hat{z})$ et $y = (0, \hat{y})$ sont dans la boîte à flots et distants de $d < 2\delta$ et on peut donc connecter y à $\varphi_\tau(z)$ via un bout de trajectoire de la forme

$$\gamma(t) = (t, \alpha(t)\hat{z} + (1 - \alpha(t))\hat{y}) \quad \forall t \in [0, \tau]$$

avec $\alpha : [0, \tau] \rightarrow [0, 1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $\alpha(t) = 0$ pour t proche de 0 et $\alpha(t) = 1$ pour t proche de τ . De plus, en notant que

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{\alpha}(t)(\hat{z} - \hat{y})) \quad \forall t \in [0, \tau]$$

on peut voir ce bout de trajectoire comme la solution d'un problème de Cauchy

$$\gamma(0) = y \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(t) = Z(\gamma(t)) \quad \forall t \in [0, \tau],$$

pour un champ de vecteurs Z qui correspond à une perturbation du champ $Y = e_1$ (X dans la boîte à flot) de la forme

$$Z(x) = Y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{Z}(x) \end{pmatrix}$$

où \hat{Z} est nulle hors du cylindre $[0, \tau] \times B_\nu(\hat{z})$ (où $B_\nu(\hat{z})$ désigne la boule ouverte centrée en \hat{z} de rayon ν dans \mathbb{R}^{n-1}) et tel que

$$\|Z - Y\|_{C^0} = \|\hat{Z}\|_{C^0} < 2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}|\hat{z} - \hat{y}| = 2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}d < 2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}\delta.$$

En conclusion, comme \hat{Z} est nulle hors du cylindre de perturbation $[0, \tau] \times B_\nu(\hat{z})$ et que le bout de trajectoire $\{\varphi_s(z) | s \in (0, t)\}$ ne rencontre pas ce

cylindre, on peut montrer le résultat désiré en prenant $\delta > 0$ suffisamment petit tel que $2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}\delta < \epsilon$.

Nous venons de démontrer un résultat de fermeture d'orbite en topologie C^0 et il est important de noter que la construction utilisée ne permet pas de démontrer le résultat en topologie C^1 . En effet, la méthode suppose de construire un champ connectant de taille $< 2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}d$ qui s'annule hors d'un cylindre de rayon ν . Un tel champ devra nécessairement avoir une différentielle de taille au moins $2\|\dot{\alpha}\|_{C^0}d/\nu$ en certains points ce qui posera problème pour ν proche de δ et rien ne permet supposer que l'orbite intermédiaire $\{\varphi_s(z) | s \in (0, t)\}$ passe suffisamment loin de z avant de s'en approcher d'une distance inférieure à δ . Malgré cette difficulté majeure Charles Pugh est parvenu à démontrer en 1967 le résultat suivant (voir [15, 16]) :

Théorème 1.6.1 (Closing Lemma). *Soit M une variété compacte munie d'une norme C^1 et soit $x \in M$ un point non-errant d'un champ $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ $Z \in \mathcal{X}^1(M)$ tel que $\|Z - X\|_{C^1} < \epsilon$ et x est un point périodique de Z .*

La démonstration du Closing Lemma est difficile mais on peut néanmoins en donner une petite idée en reprenant une preuve "simplifiée", proposée par Jie Hua Mai en 1986 [13], basée sur un lemme de connection pour des familles d'ellipsoïdes dans l'espace euclidien.

On se place dans \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$ et on considère une famille infinie dénombrable d'ellipsoïdes $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ donnés par

$$E_i = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid |P_i(v)| \leq \|P_i\| \right\} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d , $\|\cdot\|$ désigne la norme d'opérateurs linéaires de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d associée, et où $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie dénombrable d'applications linéaires inversibles de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d . Pour tout point $y \in \mathbb{R}^d$, tout nombre réel $r > 0$ et tout indice $i \in \mathbb{N}$, on appelle E_i -ellipsoïde centré en y de rayon r l'ellipsoïde défini par

$$E_i(y, r) := \{y + rv \mid v \in E_i\} = \{y' \mid |P_i(y' - y)| \leq r\|P_i\|\}$$

qui contient la boule ouverte $B(y, r)$. Le Lemme de Mai sur lequel s'appuie la démonstration "simplifiée" du Closing Lemma est le suivant :

Lemme 1.6.2 (Lemme de Mai). *Pour tout $N \geq 2$, il existe un nombre réel $\lambda \geq 3$ et un entier $k > 0$, dépendant de la famille d'ellipsoïdes $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et de N , qui vérifient la propriété suivante : Pour tout réel $r > 0$ et tout ensemble fini*

$Y = \{y_1, \dots, y_J\} \subset \mathbb{R}^d$ tel que l'ensemble $Y \cap B(0, r)$ contienne au moins deux points, il existe k points z_1, \dots, z_k dans \mathbb{R}^d et k nombres réels $r_1, \dots, r_k > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) il existe $j, l \in \{1, \dots, J\}$ avec $j > l$ tels que $z_1 = y_j$ et $z_k = y_l$;
- (ii) $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, E_i(z_i, r_i) \subset B(0, \lambda r)$;
- (iii) $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, E_i(z_i, r_i) \cap (Y \setminus \{y_j, y_l\}) = \emptyset$;
- (iv) $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, z_{i+1} \in E_i(z_i, r_i/N)$.

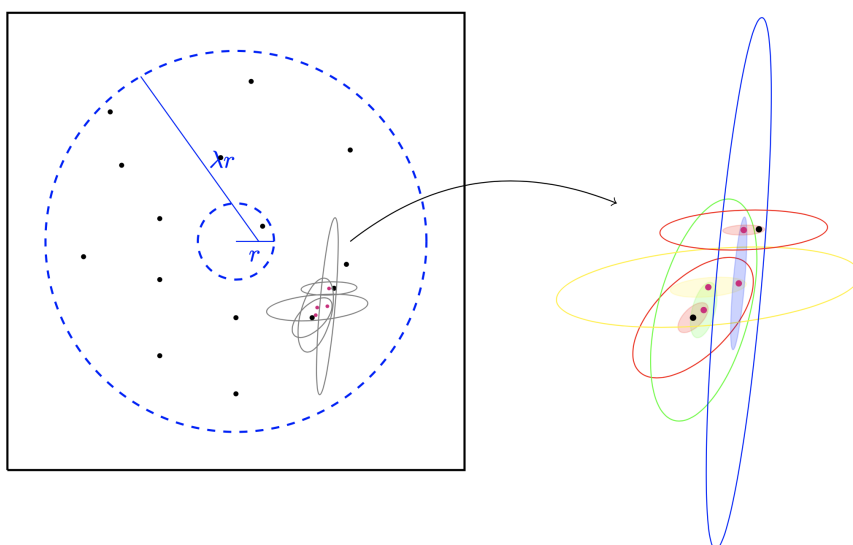
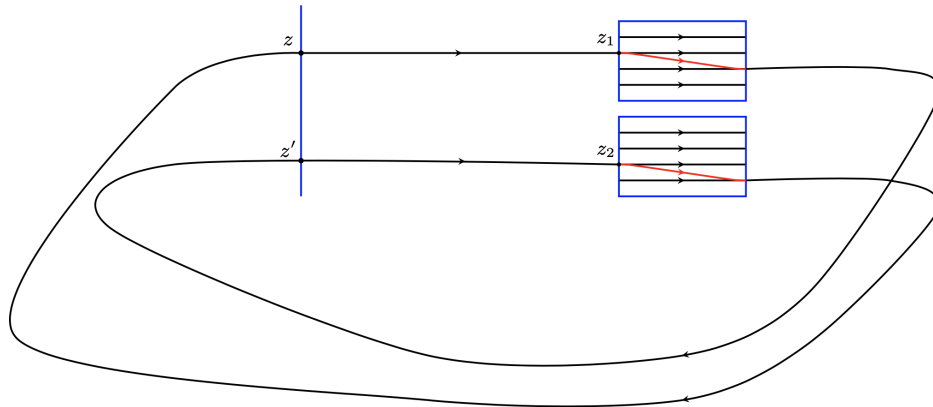


FIGURE 1.10 – Lemme de Mai

On renvoie le lecteur à [?] ou au mémoire de Marie-Claude Arnaud [?] sur le Closing Lemma pour une preuve détaillée du Lemme de Mai. Ce lemme affirme qu'on peut, sous certaines hypothèses, connecter deux points d'un ensemble fini donné en respectant à chaque étape i une contrainte liée à l'ellipsoïde E_i . Ce type de propriétés peut être utilisé pour fermer une orbite comme on l'a fait en topologie C^0 en considérant un nombre fini de connections de petite taille en topologie C^1 comme on peut le voir dans la Figure 1.11 avec deux connections. La famille d'ellipsoïdes à considérer pour cela sera donnée par les différentielles d'une famille infinie dénombrable d'applications de Poincaré après i tours qu'on peut définir au voisinage du point non-errant. On renvoie le lecteur à [?] et [?] pour plus de détails.

FIGURE 1.11 – Fermeture d'orbite en topologie C^1

1.7 Un résultat de densité en topologie C^1

Nous citons pour terminer le résultat de densité obtenu par Charles Pugh [?] en combinant son Closing Lemma avec un résultat antérieur démontré indépendamment par Stephen Smale [18] et Ivan Kupka [11].

Théorème 1.7.1. *Étant donnée une variété compacte M (de classe C^∞), l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \mathcal{X}^1(M)$ vérifiant les propriétés suivantes est résiduel dans $\mathcal{X}^1(M)$:*

- (P1) *Tout point singulier de X est hyperbolique.*
- (P2) *Tout orbite périodique de X est hyperbolique.*
- (P3) *Les variétés stables et instables des points d'équilibres ou périodiques se rencontrent en position générales.*
- (P4) *Pour tout $x \in M$, $\alpha(x) \cup \omega(x) \in \Gamma(X)$, où $\Gamma(X) \subset M$ est l'union de toutes les points d'équilibres et périodiques.*

Les propriétés (P1) et (P2) ont déjà été vues dans la Proposition 1.5.1, la propriété (P3) signifie que les variétés stables et instables définies dans la section 1.3 s'intersectent de la manière la plus satisfaisante qu'on puisse souhaiter, et la propriété (P4) nous dit que les orbites tendent en $+\infty$ et $-\infty$ vers l'ensemble $\Gamma(X)$ qui concentre toutes les orbites compactes du flot.

Le Théorème de densité de Pugh donne une petite idée des propriétés qu'on peut attendre des systèmes dynamiques génériques. Ce type de résultat est emblématique des recherches menées depuis la fin des années 1950 sur le thème "on ne se donne pas d'équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions" encore très actives aujourd'hui. Nous

renvoyons le lecteur au livre de Christian Bonatti, Lorenzo Diaz et Marcelo Viana [1] pour un état de l'art précis de la théorie des systèmes dynamiques génériques et nous lui suggérons la lecture du texte de vulgarisation "L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos" [6] d'Étienne Ghys pour une explication à la fois claire et détaillée de nombreux aspects de la théorie non-mentionnés ici.

Bibliographie

- [1] C. BONATTI, L. J. DÍAZ et M. VIANA : *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, vol. 102 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, *Mathematical Physics*, III.
- [2] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [3] H. P. DE SAINT-GERVAIS : *Analyse Situs. Topologie algébrique des variétés*. hal-014337033. 2017. URL <http://analysis-situs.math.cnrs.fr>.
- [4] J.-P. DEMAILLY : *Analyse numérique et équations différentielles*. Grenoble Sciences. EDP Sciences, 2006.
- [5] E. GHYS : Construction de champs de vecteurs sans orbite périodique (d'après Krystyna Kuperberg). Num. 227, pp. Exp. No. 785, 5, 283–307. 1995. Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94.
- [6] E. GHYS : *L'attracteur de Lorenz, paradigme du chaos*. Séminaire Poincaré XIV. 2010.
- [7] E. GHYS : The work of Artur Avila. *Actes de Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. 1*, pp. 47–54. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
- [8] M. GOLUBITSKY et V. GUILLEMIN : *Stable mappings and their singularities*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [9] M. W. HIRSCH et S. SMALE : *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.
- [10] M. C. IRWIN : *Smooth dynamical systems*, vol. 17 de *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River

- Edge, NJ, 2001. doi:10.1142/9789812810120. URL <https://doi.org/10.1142/9789812810120>. Reprint of the 1980 original, With a foreword by R. S. MacKay.
- [11] I. KUPKA : Contribution à la théorie des champs génériques. *Contributions to Differential Equations*, 2:457–484, 1963.
- [12] J. M. LEE : *Introduction to smooth manifolds*, vol. 218 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003. doi:10.1007/978-0-387-21752-9. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21752-9>.
- [13] J. H. MAI : A simpler proof of C^1 closing lemma. *Sci. Sinica Ser. A*, 29(10):1020–1031, 1986.
- [14] J. W. MILNOR : *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965. Based on notes by David W. Weaver.
- [15] C. C. PUGH : The closing lemma. *Amer. J. Math.*, 89:956–1009, 1967. doi:10.2307/2373413. URL <https://doi.org/10.2307/2373413>.
- [16] C. C. PUGH : An improved closing lemma and a general density theorem. *Amer. J. Math.*, 89:1010–1021, 1967. doi:10.2307/2373414. URL <https://doi.org/10.2307/2373414>.
- [17] C. ROBINSON : *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [18] S. SMALE : Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 17:97–116, 1963.
- [19] N. STEENROD : *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

Table des matières

Sommaire	i
Les auteurs	iii
Préface	v
1 Quelques propriétés des champs de vecteurs génériques	1
1.1 Introduction	1
1.2 Orbites et flot d'un champ de vecteur	2
1.3 Portraits de phases locaux	8
1.4 Aspect topologique	12
1.5 Champs de vecteurs génériques	16
1.6 Le Closing Lemma de Pugh	18
1.7 Un résultat de densité en topologie C^1	23
Bibliographie	24
Table des matières	27