Quelques propriétés des champs de vecteurs génériques

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur

Informatique Mathématique
Une photographie en 2022

9 juin 2022

Introduction

Objet d'étude : Systèmes dynamiques continus donnés par le flot d'un champ de vecteurs autonome sur une variété différentielle

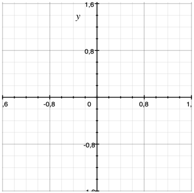
Introduction

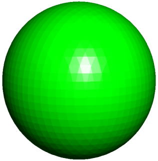
Objet d'étude : Systèmes dynamiques continus donnés par le flot d'un champ de vecteurs autonome sur une variété différentielle

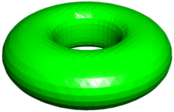
Objectif : Décrire certaines des propriétés vérifiées par les systèmes dynamiques continus associés à des champs de vecteurs génériques dans l'ensemble de tous les champs

Espace d'état et champs de vecteurs

Espace d'état : Une variété différentielle M de classe C^∞ de dimension $n \geq 1$

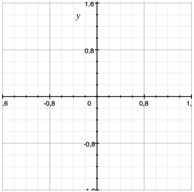


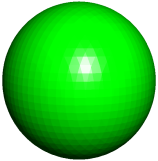


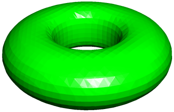


Espace d'état et champs de vecteurs

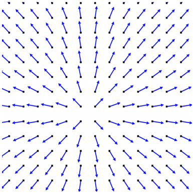
Espace d'état : Une variété différentielle M de classe C^∞ de dimension $n \geq 1$

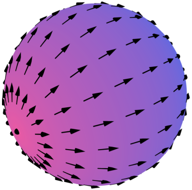


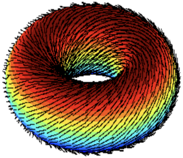




Champ de vecteurs : En chaque point x de M on se donne un vecteur vitesse $X(x)$ tangent à M en x







Problème de Cauchy et Théorème de Cauchy-Lipschitz

Étant donné un couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$, on appelle **Problème de Cauchy** en (t_0, x_0) le problème qui consiste à étudier les solutions de l'équation différentielle associée à X ayant pour condition initiale x_0 au temps t_0

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = X(x(t)) \quad \forall t \in I,$$

où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle contenant t_0.

Problème de Cauchy et Théorème de Cauchy-Lipschitz

Étant donné un couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$, on appelle **Problème de Cauchy** en (t_0, x_0) le problème qui consiste à étudier les solutions de l'équation différentielle associée à X ayant pour condition initiale x_0 au temps t_0

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t) = X(x(t)) \quad \forall t \in I,$$

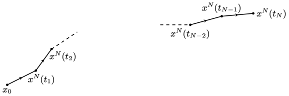
où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle contenant t_0.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si X est de classe C^1 sur M alors il **existe** un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une fonction $x : I \to M$ de classe C^1 solution du problème de Cauchy sur I.
De plus, cette solution est **unique** sur son domaine.

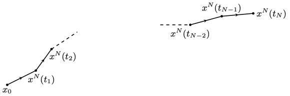
Idée de la preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz

On construit des solutions approchées qui vont converger vers une solution du problème (Méthode d'Euler).



Idée de la preuve du Théorème de Cauchy-Lipschitz

On construit des solutions approchées qui vont converger vers une solution du problème (Méthode d'Euler).



Pour l'unicité, on utilise le résultat suivant :

Lemme de Gronwall

Soit $\epsilon > 0$, $u : [0, \epsilon] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et deux constantes $\alpha, \beta \geq 0$ telles que

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s)\, ds \qquad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Alors on a

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta t} \qquad \forall t \in [0, \epsilon].$$

Orbites et flots

Étant donné X de classe C^1, on suppose maintenant que toutes les solutions de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ peuvent être étendues à $\mathbb{R}$ (le champ est dit complet).

Étant donné X de classe C^1, on suppose maintenant que toutes les solutions de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ peuvent être étendues à $\mathbb{R}$ (le champ est dit complet). Ainsi, l'application

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times M \longmapsto \varphi_t(x) := x(t) \in M,$$

où $x(t)$ est la solution du problème de Cauchy en $(0, x)$, est bien définie. On l'appelle le **flot** du champ X, elle vérifie

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Orbites et flots

Étant donné X de classe C^1, on suppose maintenant que toutes les solutions de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ peuvent être étendues à $\mathbb{R}$ (le champ est dit complet). Ainsi, l'application

$$(t, x) \in \mathbb{R} \times M \longmapsto \varphi_t(x) := x(t) \in M,$$

où $x(t)$ est la solution du problème de Cauchy en $(0, x)$, est bien définie. On l'appelle le **flot** du champ X, elle vérifie

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

On appelle **orbite** de $x \in M$, l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi_t(x) \,|\, t \in \mathbb{R}\},$$

puis on dit que x est un **point d'équilibre** si $\mathcal{O}(x) = \{x\}$ ($X(x) = 0$) et un **point périodique** si $\phi_T(x) = x$ pour un certain $T > 0$.

Exemples

Exemple (cas linéaire)

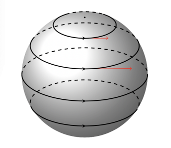
Le cas linéaire correspond à un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ du type $X(x) = Ax$, où A est une matrice carrée de taille n.

Exemples

Exemple (cas linéaire)

Le cas linéaire correspond à un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ du type $X(x) = Ax$, où A est une matrice carrée de taille n.

Exemple (champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$)

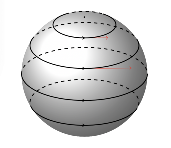


Exemples

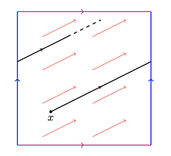
Exemple (cas linéaire)

Le cas linéaire correspond à un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ du type $X(x) = Ax$, où A est une matrice carrée de taille n.

Exemple (champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$)



Exemple (champ constants sur $\mathbb{T}^2$)



Un peu d'histoire

Selon les mots du mathématicien russe Yulij Ilyachenko, on peut scinder l'histoires des systèmes dynamiques continus en essentiellement trois périodes :

Un peu d'histoire

Selon les mots du mathématicien russe Yulij Ilyachenko, on peut scinder l'histoires des systèmes dynamiques continus en essentiellement trois périodes :

- Période 1 (XVIIème-XIXème) : On se donne une équation différentielle et on essaye de trouver ses solutions.

Un peu d'histoire

Selon les mots du mathématicien russe Yulij Ilyachenko, on peut scinder l'histoires des systèmes dynamiques continus en essentiellement trois périodes :

- Période 1 (XVIIème-XIXème) : On se donne une équation différentielle et on essaye de trouver ses solutions.

- Période 2 (début XXème) : On se donne une équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions.

Un peu d'histoire

Selon les mots du mathématicien russe Yulij Ilyachenko, on peut scinder l'histoires des systèmes dynamiques continus en essentiellement trois périodes :

- Période 1 (XVIIème-XIXème) : On se donne une équation différentielle et on essaye de trouver ses solutions.
- Période 2 (début XXème) : On se donne une équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions.
- Période 3 (après 1950) : On ne se donne pas d'équation différentielle et on essaye de dire des choses sur ses solutions.

Conjugaisons

Définition

Etant donnés deux champs de vecteurs complets de classe C^1 sur $M = \mathbb{R}^n$ de flots notés respectivement φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ et deux ouverts U, V de M, on dit qu'une bijection $h : U \to V$ **conjugue** (localement) les flots φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ si on a

$$\tilde{\varphi}_t(y) = \left(h \circ \varphi_t \circ h^{-1}\right)(y)$$

pour tout $y \in V$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\varphi}_s(y) \in V$ pour tous $s \in [0, t]$.

Conjugaisons

Définition

Etant donnés deux champs de vecteurs complets de classe C^1 sur $M = \mathbb{R}^n$ de flots notés respectivement φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ et deux ouverts U, V de M, on dit qu'une bijection $h : U \to V$ **conjugue** (localement) les flots φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ si on a

$$\tilde{\varphi}_t(y) = \left(h \circ \varphi_t \circ h^{-1}\right)(y)$$

pour tout $y \in V$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\varphi}_s(y) \in V$ pour tous $s \in [0, t]$.

Remarque

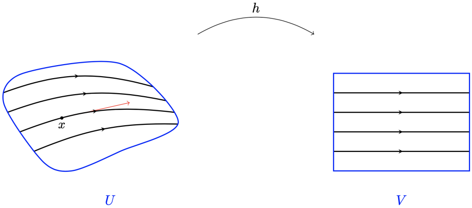
Dire que h conjugue les flots φ_t et $\tilde{\varphi}_t$ signifie que h envoie les orbites de φ_t sur les orbites de $\tilde{\varphi}_t$. Si de plus h est au moins de classe C^1 alors on a

$$Y(h(x)) = d_x h\,(X(x)) \qquad \forall x \in U.$$

Portraits de phase locaux pour des points réguliers

Théorème de redressement ou Boite à flot

Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur M et x un **point régulier** de X c'est à dire tel que $X(x) \neq 0$, alors il existe un ouvert U de M contenant x, un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme de classe C^1, $h : U \to V$, qui conjugue le flot φ_t de X au flot du champ de vecteurs constant égal à e_1 (premier vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

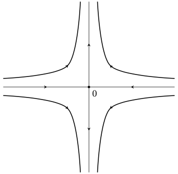


Portraits de phase locaux pour des points singuliers

On dit qu'un **point singulier** $x \in M = \mathbb{R}^n$ de X, c'est à dire tel que $X(x) = 0$, est **hyperbolique** si la différentielle de X en x, qu'on peut voir comme une matrice carrée $D_x X$ de taille n, n'a pas de valeurs propres de partie réelle nulle.

Théorème de Hartman-Grobman

Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur $M = \mathbb{R}^n$ et x_0 un **point singulier hyperbolique** de X. Alors il existe un ouvert U de M contenant x_0, un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine et un homéomorphisme $h : U \to V$ qui conjugue (localement) le flot φ_t de X au flot du champ de vecteurs linéarisé $Y(x) = D_{x_0} X(x)$.



Théorème de la variété stable

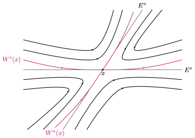
Dans ce cadre (point singulier hyperbolique de X), on peut définir les **variétés stable** et **instable** en x par

$$W^s(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(y) = x \right\},$$

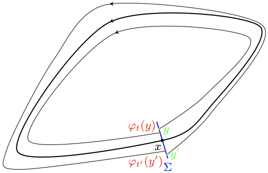
$$W^u(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(y) = x \right\} \quad \text{et on a :}$$

Théorème de la variété stable

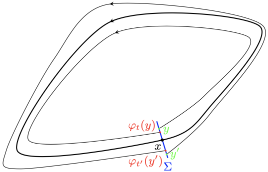
La variété stable $W^s(x)$ est une une variété immergée de classe C^1 tangente à l'espace propre stable E^s en x et la variété instable $W^u(x)$ est une variété immergée de classe C^1 tangente à l'espace propre instable E^u en x.



Soit x un point périodique (de X) de période $T > 0$ et un bout d'hypersurface Σ de classe C^∞ contenant x et transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x)$. On appelle **application de premier retour** sur Σ, l'application $\Pi_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ qui envoie un point $y \in \Sigma$ sur le premier point de l'orbite positive de y, de la forme $\varphi_t(y)$ avec $t > 0$, tel que $\varphi_t(y) \in \Sigma$.



Soit x un point périodique (de X) de période $T > 0$ et un bout d'hypersurface Σ de classe C^∞ contenant x et transverse à l'orbite $\mathcal{O}(x)$. On appelle **application de premier retour** sur Σ, l'application $\Pi_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ qui envoie un point $y \in \Sigma$ sur le premier point de l'orbite positive de y, de la forme $\varphi_t(y)$ avec $t > 0$, tel que $\varphi_t(y) \in \Sigma$.



Le point périodique x est dit **hyperbolique** si Π_Σ a une différentielle en x qui n'admet pas de valeur propre sur le cercle unité. Dans ce cas, on peut décomposer les espaces tangents le long de $\mathcal{O}(x)$ en sommes directes d'espaces stables et instables et montrer que ceux-ci sont tangents à des variétés dites stables et instables immergées dans M.

Aspects topologiques

La forme de la variété M considérée contraint la présence éventuelle de singularités d'un champ de vecteurs sur M.

Théorème de Poincaré-Hopf

Soit M une variété compacte de classe C^∞ et X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M ayant un nombre fini de points singuliers $x_1, \ldots, x_k$. Alors on a

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{ind}^X(x_i) = \chi(M),$$

où $\chi(M)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

Remarque

Une des conséquence de ce théorème est le fameux théorème de la boule chevelue qui affirme que tout champ de vecteurs continu sur $\mathbb{S}^2$ s'annule en au moins un point.

L'espace des champs de vecteurs

Si on travaille dans $\mathbb{R}^n$, on peut comparer deux champs X et Y de classe C^1 en regardant la quantité

$$\|X - Y\|_{C^1} := \sup_{x\in[0,1]^n} \{|X(x) - Y(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]^n} \{|D_x X - D_x Y|\}.$$

L'espace des champs de vecteurs

Si on travaille dans $\mathbb{R}^n$, on peut comparer deux champs X et Y de classe C^1 en regardant la quantité

$$\|X - Y\|_{C^1} := \sup_{x\in[0,1]^n} \{|X(x) - Y(x)|\} + \sup_{x\in[0,1]^n} \{|D_xX - D_xY|\}.$$

Si M est une variété compacte de dimension $n \geq 1$, on peut la recouvrir par un nombre fini d'ouverts localement difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ et définir sur chacun d'eux une norme C^1 comme ci-dessus. En considérant alors une somme de ces normes partielles, on obtient une **norme**, dite norme C^1 et notée $\|\cdot\|_{C^1}$, sur l'ensemble $\mathcal{X}^1(M)$ des champs de vecteur de classe C^1 sur M et on a :

Proposition

L'espace vectoriel normé $(\mathcal{X}^1(M), \|\cdot\|_{C^1})$ un espace de Banach.

Théorème de Baire

Dans un espace de Banach toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Théorème de Baire

Dans un espace de Banach toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Champs de vecteurs génériques

Un ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{X}^1(M)$ est dit **résiduel** si il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses (donc il est dense) et un champ d'un tel ensemble est dit **générique**.

Champs de vecteurs génériques

Théorème de Baire

Dans un espace de Banach toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Champs de vecteurs génériques

Un ensemble $\mathcal{G}$ de $\mathcal{X}^1(M)$ est dit **résiduel** si il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses (donc il est dense) et un champ d'un tel ensemble est dit **générique**.

Exemple

Un champ générique de $\mathcal{X}^1(\mathbb{S}^1)$ n'a qu'un nombre fini de points singuliers.

Un premier résultat de généricité

En appliquant des techniques de transversalité comme dans l'exemple précédent, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème

Étant donnée une variété compacte M (de classe C^∞), l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \mathcal{X}^1(M)$ vérifiant les deux propriétés suivantes est résiduel dans $\mathcal{X}^1(M)$:

(P1) Tout point singulier de X est hyperbolique.

(P2) Tout orbite périodique de X est hyperbolique.

Le théorème que l'on souhaite présenter à la toute fin de l'exposé est beaucoup plus fort, il s'appuie sur un résultat célèbre dû à Charles Pugh.

Le Closing Lemma

Supposons la variété M compacte, donnons-nous un champ de vecteurs X de classe C^1 sur M, fixons un point $x \in M$ et introduisons quelques définitions :

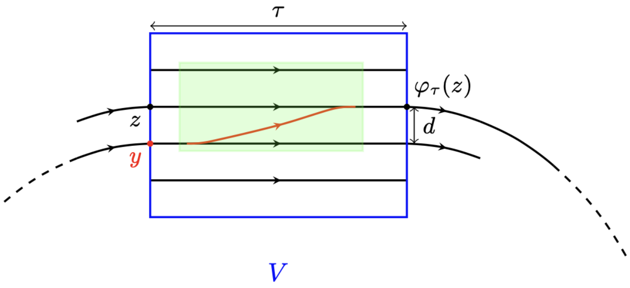
- On appelle **ensemble ω-limite** de x l'ensemble $\omega(x)$ des valeurs d'adhérence de toutes les suites $\varphi_{t_k}(x)$ où $\{t_k\}$ tend vers $+\infty$.
- Le point x est dit **non-errant** ssi pour tout voisinage U de x dans M et tout $T > 0$, il existe $y \in U$ et $t > T$ tels que $\varphi_t(y) \in U$.

Closing Lemma

Soit M une variété compacte munie d'une norme C^1 et soit $x \in M$ un point non-errant d'un champ $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ $Z \in \mathcal{X}^1(M)$ tel que $\|Z - X\|_{C^1} < \epsilon$ et x est un point périodique de Z.

Le Closing Lemma en topologie C^0

Le lemme de fermeture de Pugh affirme que l'orbite de tout point non-errant peut être fermée par une petite perturbation du champ en topologie C^1. Voyons d'abord comment démontrer facilement un tel résultat en topologie C^0 et pourquoi le passage en topologie C^1 n'est pas évident.



Idée de la démonstration du Closing Lemma

La démonstration du Closing Lemma peut s'obtenir comme conséquence d'un lemme, dû à Mai, qui porte sur un résultat de connections par des familles d'ellipsoïdes dans l'espace euclidien.

On se place dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$ et on considère une famille infinie dénombrable d'**ellipsoïdes** $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ donnés par

$$E_i = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \,|\, |P_i(v)| \leq \|P_i\| \right\} \qquad \forall i \in \mathbb{N},$$

où $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie dénombrable d'applications linéaires inversibles de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout point $y \in \mathbb{R}^d$, tout nombre réel $r > 0$ et tout indice $i \in \mathbb{N}$, on appelle **E_i-ellipsoïde centré en y de rayon r** l'ellipsoïde défini par

$$E_i(y,r) := \{ y + rv \,|\, v \in E_i \} = \left\{ y' \,|\, |P_i(y'-y)| \leq r \|P_i\| \right\}$$

qui contient la boule ouverte $B(y,r)$.

Lemme de Mai

Pour tout $N \geq 2$, il existe un nombre réel $\lambda \geq 3$ et un entier $k > 0$, dépendant de la famille d'ellipsoïdes $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et de N, qui vérifient la propriété suivante : Pour tout réel $r > 0$ et tout ensemble fini $Y = \{y_1, \ldots, y_J\} \subset \mathbb{R}^d$ tel que l'ensemble $Y \cap B(0, r)$ contienne au moins deux points, il existe k points $z_1, \ldots, z_k$ dans $\mathbb{R}^d$ et k nombres réels $r_1, \ldots, r_k > 0$ vérifiant les propriétés suivantes :

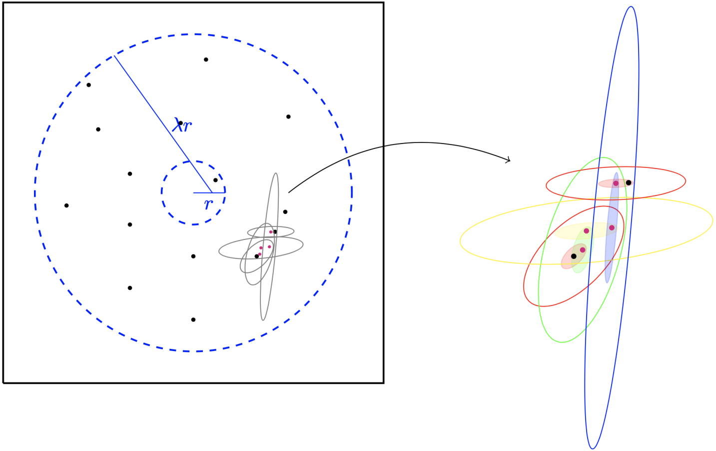
(i) il existe $j, l \in \{1, \ldots, J\}$ avec $j > l$ tels que $z_1 = y_j$ et $z_k = y_l$;

(ii) $\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $E_i\big(z_i, r_i\big) \subset B(0, \lambda r)$;

(iii) $\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $E_i\big(z_i, r_i\big) \cap \big(Y \setminus \{y_j, y_l\}\big) = \emptyset$;

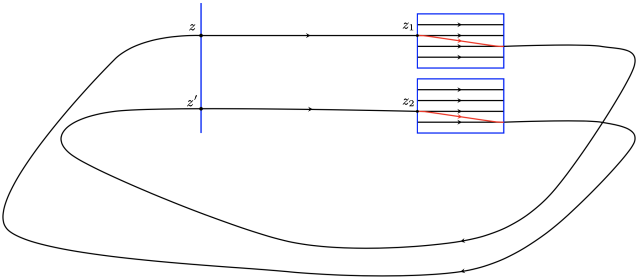
(iv) $\forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $z_{i+1} \in E_i\big(z_i, r_i/N\big)$.

Le Lemme de Mai (dessin)



Idée de la démonstration du Closing Lemma (retour)

La démonstration du Closing Lemma consiste à considérer une famille d'ellipsoïdes données par une famille infinie dénombrable d'applications de Poincaré après i tours qu'on peut définir au voisinage du point non-errant et à faire des connections (comme dans le cas du Closing Lemma en topologie C^0) dans un nombre fini de boites à flot.



Un résultat de généricité en topologie C^1

En combinant son Closing Lemma avec un résultat antérieur démontré indépendamment par Stephen Smale et Ivan Kupka, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème

Étant donnée une variété compacte M (de classe C^∞), l'ensemble des champs de vecteurs $X \in \mathcal{X}^1(M)$ vérifiant les propriétés suivantes est résiduel dans $\mathcal{X}^1(M)$:

(P1) Tout point singulier de X est hyperbolique.

(P2) Tout orbite périodique de X est hyperbolique.

(P3) Les variétés stables et instables des points d'équilibres ou périodiques se rencontrent en position générales.

(P4) Pour tout $x \in M$, $\alpha(x) \cup \omega(x) \in \Gamma(X)$, où $\Gamma(X) \subset M$ est l'union de toutes les points d'équilibres et périodiques.

Fin

Merci pour votre attention ! !