Transport de masse sur les surfaces

Ludovic Rifford

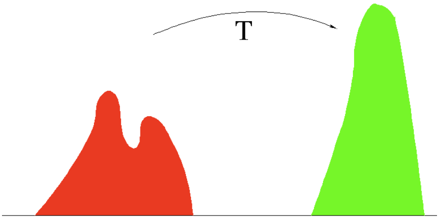
Université de Nice - Sophia Antipolis

Colloquium Lorrain de Mathématiques
Institut Elie Cartan Nancy

Transport de Monge quadratique dans $\mathbb{R}^n$

Soit μ_0 et μ_1 deux **mesures de probabilités à support compacts** dans $\mathbb{R}^n$. On appelle **application de transport** entre μ_0 et μ_1 toute application mesurable $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$, c'est à dire

$$\mu_1(B) = \mu_0\big(T^{-1}(B)\big), \quad \forall B \text{ mesurable } \subset \mathbb{R}^n.$$



Le théorème de Brenier

Problème de Monge quadratique : Étude des applications de transport $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui minimisent le coût de transport **quadratique**

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, d\mu_0(x).$$

Le théorème de Brenier

Problème de Monge quadratique : Étude des applications de transport $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui minimisent le coût de transport **quadratique**

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, d\mu_0(x).$$

Théorème (Brenier '91)

Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale pour le coût de transport quadratique. En fait, il existe une fonction convexe $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \nabla\psi(x) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Le théorème de Brenier

Problème de Monge quadratique : Étude des applications de transport $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui minimisent le coût de transport **quadratique**

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, d\mu_0(x).$$

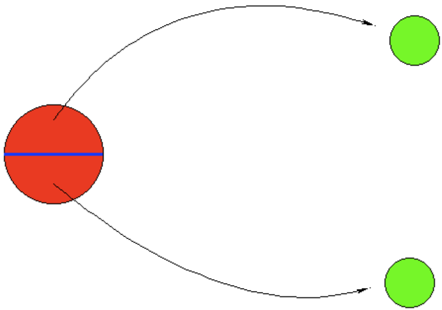
Théorème (Brenier '91)

Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale pour le coût de transport quadratique. En fait, il existe une fonction convexe $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \nabla\psi(x) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Quid de la régularité ?

Contre-exemple trivial



Théorie de la régularité de Caffarelli

Théorème (Caffarelli '90s)

Soit Ω_0, Ω_1 *des ouverts bornés connexes de* $\mathbb{R}^n$ *et* f_0, f_1 *des densités de probabilité sur* Ω_0 *et* Ω_1 *telles que* $f_0, f_1, 1/f_0$ *et* $1/f_1$ *sont bornées. Si* μ_0 *et* μ_1 *ont pour densités* f_0 *et* f_1 *par rapport à la mesure de Lebesgue et si* Ω_1 *est convexe, alors le transport optimal quadratique entre* μ_0 *et* μ_1 *est continu.*

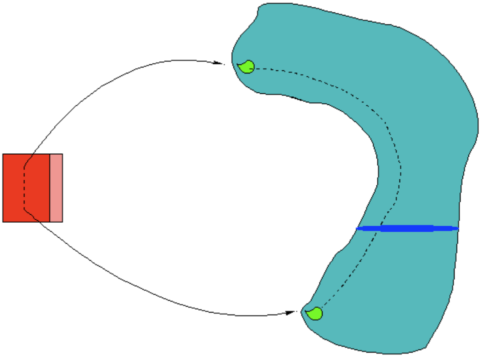
Théorie de la régularité de Caffarelli

Théorème (Caffarelli '90s)

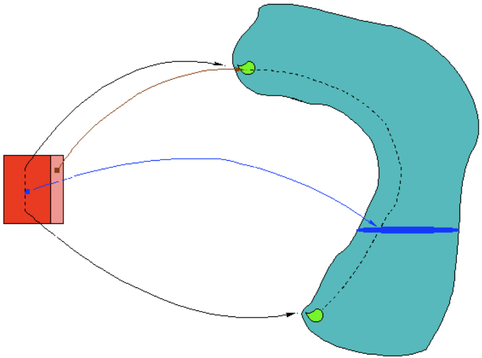
Soit Ω_0, Ω_1 *des ouverts bornés connexes de* $\mathbb{R}^n$ *et* f_0, f_1 *des densités de probabilité sur* Ω_0 *et* Ω_1 *telles que* $f_0, f_1, 1/f_0$ *et* $1/f_1$ *sont bornées. Si* μ_0 *et* μ_1 *ont pour densités* f_0 *et* f_1 *par rapport à la mesure de Lebesgue et si* Ω_1 *est convexe, alors le transport optimal quadratique entre* μ_0 *et* μ_1 *est continu.*

La convexité de la cible est nécessaire.

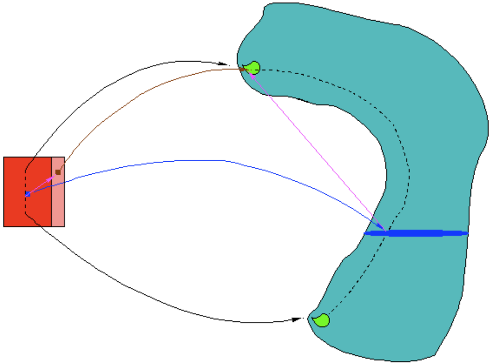
Nécessité de la convexité



Nécessité de la convexité

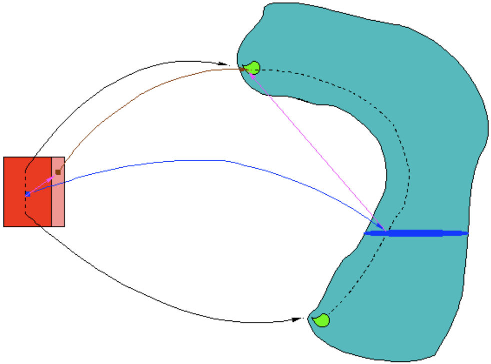


Nécessité de la convexité



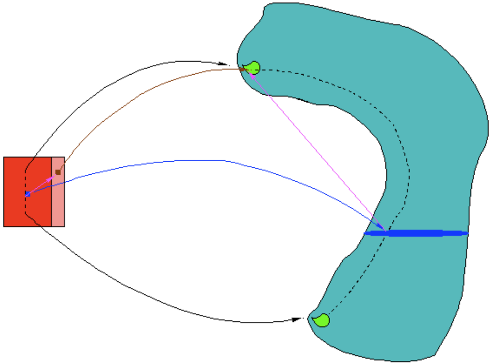
T gradient d'une fonction convexe

Nécessité de la convexité



T gradient d'une fonction convexe $\Longrightarrow \langle y-x, T(y)-T(x)\rangle \geq 0$

Nécessité de la convexité



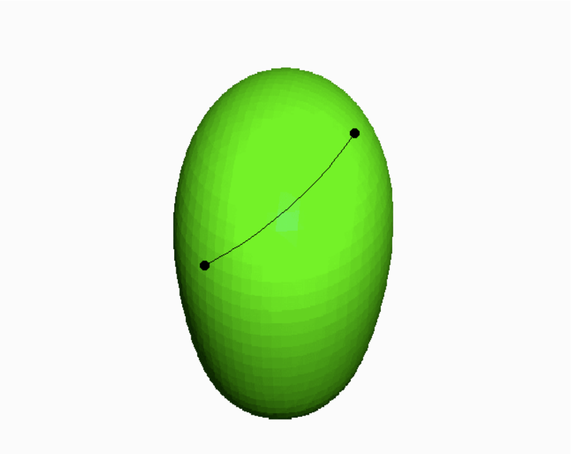
T gradient d'une fonction convexe $\Longrightarrow \langle y-x, T(y)-T(x)\rangle \geq 0$!!!

Transport de masse sur les surfaces

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x, y \in M$, on définit la distance entre x et y, notée $d(x, y)$, comme le minimum des longueurs des courbes tracées sur M qui relient x à y.

Transport de masse sur les surfaces

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x, y \in M$, on définit la distance entre x et y, notée $d(x, y)$, comme le minimum des longueurs des courbes tracées sur M qui relient x à y.



Le théorème de McCann

Problème de transport optimal quadratique : Étant données deux mesures de probabilité μ_0 et μ_1 sur M, on s'intéresse aux applications de transport $T : M \to M$ ($T_\sharp \mu_0 = \mu_1$) qui minimisent le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Le théorème de McCann

Problème de transport optimal quadratique : Étant données deux mesures de probabilité μ_0 et μ_1 sur M, on s'intéresse aux applications de transport $T : M \to M$ ($T_\sharp \mu_0 = \mu_1$) qui minimisent le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Théorème (McCann '01)

Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale transportant μ_0 sur μ_1. En fait, il existe une fonction c-convexe $\varphi : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \exp_x(\nabla\varphi(x)) \qquad \mu_0 \ p.p. \ x \in \mathbb{R}^n.$$

La propriété TCP

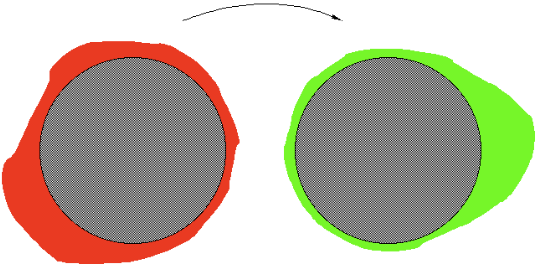
On dira que la surface compacte $M \subset \mathbb{R}^n$ vérifie **TCP** (pour Transport Continuity Property) si la propriété suivante est satisfaite :

Pour toute paire de mesures de probabilité μ_0, μ_1 associées à des **densités continues strictement positives** ρ_0, ρ_1, c'est à dire

$$\mu_0 = \rho_0 \mathrm{vol}_g, \quad \mu_1 = \rho_1 \mathrm{vol}_g,$$

l'application de transport optimale quadratique entre μ_0 et μ_1 est **continue**.

La propriété TCP

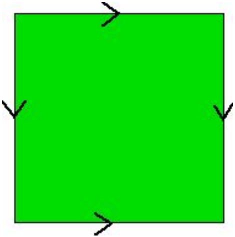


Pour toute paire de mesures de probabilité μ_0, μ_1 associées à des **densités continues strictement positives** ρ_0, ρ_1, c'est à dire

$$\mu_0 = \rho_0 \mathrm{vol}_g, \quad \mu_1 = \rho_1 \mathrm{vol}_g,$$

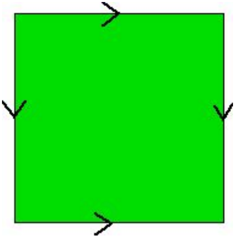
l'application de transport optimale quadratique entre μ_0 et μ_1 est **continue**.

Le cas des tores plats



Sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, on a $\quad d(x,y) = \inf_{p\in\mathbb{Z}^2} |x - y + p|.$

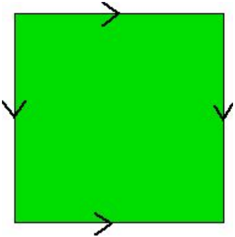
Le cas des tores plats



$$\text{Sur } \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \text{on a} \qquad d(x,y) = \inf_{p \in \mathbb{Z}^2} |x - y + p|.$$

On peut "relever" un problème de transport sur $\mathbb{T}^2$ à $\mathbb{R}^2$ et utiliser la théorie de la régularité de Caffarelli.

Le cas des tores plats



Sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, on a $\quad d(x,y) = \inf_{p \in \mathbb{Z}^2} |x - y + p|.$

On peut "relever" un problème de transport sur $\mathbb{T}^2$ à $\mathbb{R}^2$ et utiliser la théorie de la régularité de Caffarelli.

Théorème (Cordero-Erausquin '99)

Les tores plats vérifient **TCP**.

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivités sont convexes,*

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivités sont convexes,*
- *le coût $c = \frac{1}{2}d^2$ est régulier.*

Exponentielle et domaine d'injectivité

Soit $x \in M$ fixé.

- Pour tout $v \in T_xM$, on définit l'**exponentielle** de v par

$$\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1),$$

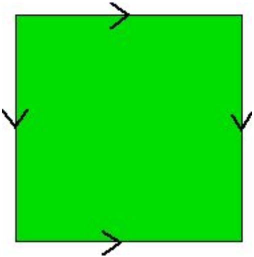
où $\gamma_{x,v} : [0,1] \longrightarrow M$ est l'unique géodésique partant de x avec vitesse v.

Exponentielle et domaine d'injectivité

Soit $x \in M$ fixé.

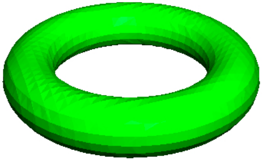
- Pour tout $v \in T_xM$, on définit l'**exponentielle** de v par
$$\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1),$$
où $\gamma_{x,v} : [0,1] \longrightarrow M$ est l'unique géodésique partant de x avec vitesse v.
- On appelle **domaine d'injectivité** de x, le sous-ensemble de T_xM défini par
$$\mathcal{I}(x) := \left\{ v \in T_xM \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists t > 1 \text{ t.q. } \gamma_{tv} \text{ est l'unique} \\ \text{géod. minim. entre } x \text{ et } \exp_x(tv) \end{array} \right\}.$$
C'est un ouvert borné étoilé (par rapport à $0 \in T_xM$) à bord Lipschitz.

Tores plats : tous les domaines d'injectivité sont convexes.



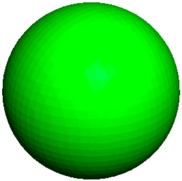
Domaines d'injectivité : Exemples...

Tores de révolution: les domaines d'injectivité ne sont pas nécessairement convexes.



Domaines d'injectivité : Exemples...

Sphères : tous les domaines d'injectivité sont des boules

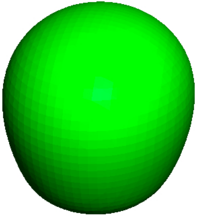


Domaines d'injectivité : Exemples...

Perturbations C^4 des sphères rondes :

Theorem (Figalli-R '09)

Toute petite déformation de la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ en topologie C^4 a des domaines d'injectivité uniformément convexes.



Domaines d'injectivité : Exemples...

Ellipsoides de révolution (cas oblat):

$$E_\mu : \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\mu}\right)^2 = 1 \qquad \mu \in (0,1].$$

Theorem (Bonnard-Caillau-R '10)

Les domaines d'injectivité d'un ellipsoide de révolution oblat sont convexes pour tout point si et seulement si le rapport entre le petit et le grand axe est supérieur ou égal à $1/\sqrt{3}(\simeq 0.58)$.

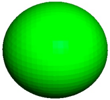
Domaines d'injectivité : Exemples...

Ellipsoides de révolution (cas oblat):

$$E_\mu : \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\mu}\right)^2 = 1 \qquad \mu \in (0,1].$$

Theorem (Bonnard-Caillau-R '10)

Les domaines d'injectivité d'un ellipsoide de révolution oblat sont convexes pour tout point si et seulement si le rapport entre le petit et le grand axe est supérieur ou égal à $1/\sqrt{3} (\simeq 0.58)$.



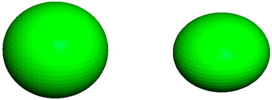
Domaines d'injectivité : Exemples...

Ellipsoides de révolution (cas oblat):

$$E_\mu : \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\mu}\right)^2 = 1 \qquad \mu \in (0,1].$$

Theorem (Bonnard-Caillau-R '10)

Les domaines d'injectivité d'un ellipsoide de révolution oblat sont convexes pour tout point si et seulement si le rapport entre le petit et le grand axe est supérieur ou égal à $1/\sqrt{3}(\simeq 0.58)$.



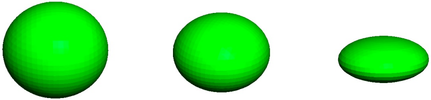
Domaines d'injectivité : Exemples...

Ellipsoides de révolution (cas oblat):

$$E_\mu : \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\mu}\right)^2 = 1 \qquad \mu \in (0,1].$$

Theorem (Bonnard-Caillau-R '10)

Les domaines d'injectivité d'un ellipsoide de révolution oblat sont convexes pour tout point si et seulement si le rapport entre le petit et le grand axe est supérieur ou égal à $1/\sqrt{3} (\simeq 0.58)$.



Caractérisation de **TCP** sur les surfaces (rappel)

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivités sont convexes,*
- *le coût $c = \frac{1}{2} d_g^2$ est régulier.*

Coûts réguliers

Le coût $c = \frac{1}{2}d_g^2/2 : M \times M \to \mathbb{R}$ est dit **régulier**, si pour tout $x \in M$ et tout $v_0, v_1 \in \mathcal{I}(x)$, on a

$$c\big(x, y_t\big) - c\big(x', y_t\big) \leq \max\Big(c\big(x, y_0\big) - c\big(x', y_0\big),\, c\big(x, y_1\big) - c\big(x', y_1\big)\Big),$$

pour tout $x' \in M$ et tout $t \in [0, 1]$, où

$$y_t := \exp_x v_t \quad \text{et} \quad v_t := (1-t)v_0 + tv_1 \quad (\in \mathcal{I}(x)).$$

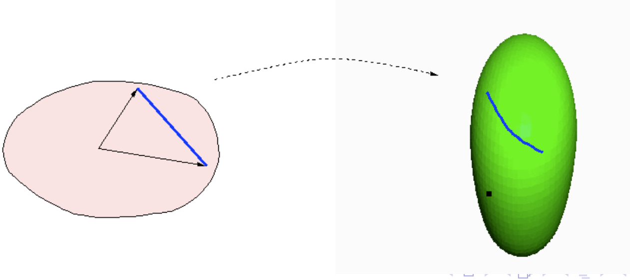
Coûts réguliers

Le coût $c = \frac{1}{2}d_g^2/2 : M \times M \to \mathbb{R}$ est dit **régulier**, si pour tout $x \in M$ et tout $v_0, v_1 \in \mathcal{I}(x)$, on a

$$c\big(x, y_t\big) - c\big(x', y_t\big) \leq \max\Big(c\big(x, y_0\big) - c\big(x', y_0\big), c\big(x, y_1\big) - c\big(x', y_1\big)\Big),$$

pour tout $x' \in M$ et tout $t \in [0,1]$, où

$$y_t := \exp_x v_t \quad \text{et} \quad v_t := (1-t)v_0 + tv_1 \quad (\in \mathcal{I}(x)).$$



Remarque triviale

Remarque

Supposons que tous les domaines d'injectivité de M sont convexes. Alors le coût c est **régulier** *si et seulement si pour tous $x, x' \in M$, la fonction*

$$F_{x,x'} \; : \; v \in \mathcal{I}(x) \longmapsto c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$$

est **quasi-convexe** *(ses sous-ensembles de niveau sont toujours convexes).*

Lemme facile

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Supposons que pour tout $v \in U$ et tout $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la propriété suivante est vérifiée :

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle > 0.$$

Alors F est quasi-convexe.

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$.

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t\in[0,1]} h(t) > \max\{h(0), h(1)\}.$$

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t\in[0,1]} h(t) \, > \, \max\{h(0), h(1)\}.$$

On a

$$\dot{h}(\tau) = \langle \nabla_{v_\tau} F, \dot{v}_\tau \rangle \quad \text{et} \quad \ddot{h}(\tau) = \langle \nabla^2_{v_\tau} F \, \dot{v}_\tau, \dot{v}_\tau \rangle.$$

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t\in[0,1]} h(t) > \max\{h(0), h(1)\}.$$

On a

$$\dot{h}(\tau) = \langle \nabla_{v_\tau} F, \dot{v}_\tau \rangle \quad \text{et} \quad \ddot{h}(\tau) = \langle \nabla^2_{v_\tau} F \, \dot{v}_\tau, \dot{v}_\tau \rangle.$$

Comme τ est un maximum local, on a $\dot{h}(\tau) = 0$.

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t\in[0,1]} h(t) \; > \; \max\{h(0), h(1)\}.$$

On a

$$\dot{h}(\tau) = \langle \nabla_{v_\tau} F, \dot{v}_\tau \rangle \quad \text{et} \quad \ddot{h}(\tau) = \langle \nabla^2_{v_\tau} F \, \dot{v}_\tau, \dot{v}_\tau \rangle.$$

Comme τ est un maximum local, on a $\dot{h}(\tau) = 0$.
Contradiction !! $\square$

Exercice 1

Le lemme suivant est faux !!

Lemme faux

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Supposons que pour tout $v \in U$ et tout $w \in \mathbb{R}^n$ la propriété suivante est vérifiée :

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \implies \langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle \geq 0.$$

Alors F est quasi-convexe.

Exercice 2

Cependant, le résultat suivant est vrai.

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle \geq -C \left| \langle \nabla_v F, w \rangle \right| |w| \qquad \forall v \in U, \forall w \in \mathbb{R}^n,$$

alors F est quasi-convexe.

Retour à notre problème

Rappel : $F(v) = F_{x,x'}(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$

Retour à notre problème

Rappel : $F(v) = F_{x,x'}(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$
Donc

$$\frac{\partial F}{\partial v}(v)\cdot h = \frac{\partial c}{\partial y}\big(x, \exp_x(v)\big)\cdot \frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h \\ - \frac{\partial c}{\partial y}\big(x', \exp_x(v)\big)\cdot \frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h,$$

Retour à notre problème

Rappel : $F(v) = F_{x,x'}(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$
Donc

$$\frac{\partial F}{\partial v}(v)\cdot h = \frac{\partial c}{\partial y}\big(x, \exp_x(v)\big)\cdot\frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h - \frac{\partial c}{\partial y}\big(x', \exp_x(v)\big)\cdot\frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h) = {} & \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\big(x, \exp_x(v)\big)\cdot\left(\frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h, \frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h\right) \\ & - \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\big(x', \exp_x(v)\big)\cdot\left(\frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h, \frac{\partial \exp_x}{\partial v}(v)\cdot h\right) \\ & + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\big(x, \exp_x(v)\big) - \frac{\partial c}{\partial y}\big(x', \exp_x(v)\big)\right)\cdot\frac{\partial^2 \exp_x}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h)\end{aligned}$$

Retour à notre problème (suite)

Posons $y := \exp_x(v), q := \frac{\partial c}{\partial y}(x,y), q' := \frac{\partial c}{\partial y}(x',y)$ On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h) = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-q),y\right)\cdot\left(\tilde{h},\tilde{h}\right)\\ -\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-q'),y\right)\cdot\left(\tilde{h},\tilde{h}\right)\\ +(q-q')\cdot\frac{\partial^2 \exp_x}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h)\end{aligned}$$

Retour à notre problème (suite)

Posons $y := \exp_x(v), q := \frac{\partial c}{\partial y}(x,y), q' := \frac{\partial c}{\partial y}(x',y)$ On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h) = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-q),y\right)\cdot\left(\tilde{h},\tilde{h}\right) \\ -\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-q'),y\right)\cdot\left(\tilde{h},\tilde{h}\right) \\ +(q-q')\cdot\frac{\partial^2 \exp_x}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h)\end{aligned}$$

Or $\frac{\partial c}{\partial x}(x,\exp_x(v)) = -v$, donc

$$\frac{\partial^2 \exp_x}{\partial v^2}(v)\cdot(h,h) = -\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}(x,y)\right)^{-1}\frac{\partial^3 c}{\partial x\partial y^2}(x,y)\cdot\left(\tilde{h},\tilde{h}\right)$$

Retour à notre problème (suite)

En posant

$$\Phi(p) = \Phi_{x,y,h}(p) = -\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-p), y\right) \cdot \left(\tilde{h}, \tilde{h}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v) \cdot (h, h) \\ = \quad & -\Phi(q) + \Phi(q') - D\Phi(q) \cdot (q' - q) \end{aligned}$$

Retour à notre problème (suite)

En posant

$$\Phi(p) = \Phi_{x,y,h}(p) = -\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\left(\exp_y(-p), y\right) \cdot \left(\tilde{h}, \tilde{h}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(v) \cdot (h, h) \\ = \quad & -\Phi(q) + \Phi(q') - D\Phi(q) \cdot (q' - q) \\ = \quad & \int_0^1 (1-t) D^2\Phi(tq' + (1-t)q)\,(q' - q, q' - q)\, dt. \end{aligned}$$

Le tenseur de Ma-Trudinger-Wang

Le tenseur **MTW** noté $\mathfrak{S}$ est défini par :

$$\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) = -\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\,\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\,c\left(\exp_x(t\xi),\exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tout $x \in M$, $v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi,\eta \in T_xM$.

Le tenseur de Ma-Trudinger-Wang

Le tenseur **MTW** noté $\mathfrak{S}$ est défini par :

$$\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) = -\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0}\,\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} c\left(\exp_x(t\xi), \exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tout $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$.

Proposition (Villani '09, Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface dont tous les domaines d'injectivité sont convexes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Le coût $c = \frac{1}{2}d_g^2$ est régulier.*
- *Le tenseur **MTW** est $\succeq 0$, c'est à dire qu'on a pour tout $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$,*

$$\langle \xi, \eta\rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) \geq 0.$$

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur $\mathfrak{S}$ est $\succeq 0$.*

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur $\mathfrak{S}$ est $\succeq 0$.*

Par une observation dûe à Loeper, pour tout $x \in M$ et toute paire de vecteurs unitaires tangents orthogonaux $\xi, \eta \in T_xM$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x,$$

où σ_x est la courbure gaussienne de M en x. On a par conséquent :

$$\textbf{TCP} \Longrightarrow \sigma \geq 0.$$

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur $\mathfrak{S}$ est $\succeq 0$.*

Par une observation dûe à Loeper, pour tout $x \in M$ et toute paire de vecteurs unitaires tangents orthogonaux $\xi, \eta \in T_xM$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x,$$

où σ_x est la courbure gaussienne de M en x. On a par conséquent :

$$\textbf{TCP} \implies \sigma \geq 0.$$

Donc si $M \subset \mathbb{R}^3$ et vérifie **TCP**, elle est **convexe**.

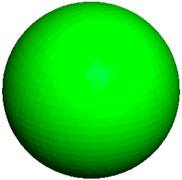
Les sphères

Loeper a le premier vérifié que le tenseur **MTW** de la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ satisfait pour tout $x \in \mathbb{S}^2$, $v \in \mathcal{I}(x)$ et $\xi, \eta \in T_x\mathbb{S}^2$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq |\xi|^2 |\eta|^2.$$

Théorème (Loeper '06)

La sphère $\mathbb{S}^2$ vérifie **TCP**.



Petites déformations de $\mathbb{S}^2$

Sur $\mathbb{S}^2$, le tenseur **MTW** est donné par

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{(x,v)}\left(\xi,\xi^\perp\right) &= 3\left[\frac{1}{r^2}-\frac{\cos(r)}{r\sin(r)}\right]\xi_1^4+3\left[\frac{1}{\sin^2(r)}-\frac{r\cos(r)}{\sin^3(r)}\right]\xi_2^4 \\ &\qquad+\frac{3}{2}\left[-\frac{6}{r^2}+\frac{\cos(r)}{r\sin(r)}+\frac{5}{\sin^2(r)}\right]\xi_1^2\xi_2^2,\end{aligned}$$

avec $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x), r := |v|, \xi = (\xi_1,\xi_2), \xi^\perp = (-\xi_2,\xi_1)$.

Théorème (Figalli-R '09)

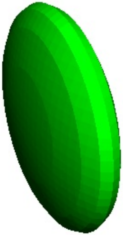
Toute petite déformation de la sphère $\mathbb{S}^2$ en topologie C^4 vérifie **TCP**.

Ellipsoides

L'ellipsoide de révolution (E_ϵ) dans $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{\epsilon^2} + y^2 + z^2 = 1, \qquad \text{with } \epsilon = 0.29,$$

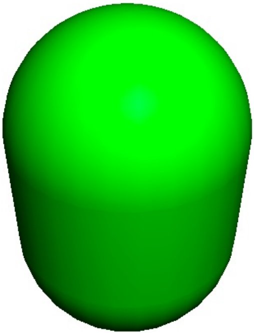
ne vérifie pas **MTW** $\succeq 0$.



Par conséquent, (E_ϵ) ne vérifie pas **TCP**.

Sauts de courbure

La surface faite de deux hémisphères liés par un tube cylindrique n'a pas un coût régulier.



Donc, elle ne vérifie pas **TCP**.

Perspectives

Conjectures

Conjecture

$\mathbf{MTW} \succeq 0 \Longrightarrow$ *convexité des domaines d'injectivité.*

Conjectures

Conjecture

$\mathbf{MTW} \succeq 0 \Longrightarrow$ *convexité des domaines d'injectivité.*

Conjecture

Une surface compacte lisse vérifie **TCP** *si et seulement si son tenseur* $\mathfrak{S}$ *est* $\succeq 0$.

La dimension supérieure

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Si (M, g) *vérifie* **(TCP)**, *alors :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est* $\succeq 0$.

La dimension supérieure

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Si (M, g) vérifie **(TCP)**, *alors :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est $\succeq 0$.*

Théorème (Figalli-R-Villani '10)

Si (M, g) satisfait les deux propriétés suivantes :

- *tous les domaines d'injectivité sont strictement convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est $\succ 0$,*

alors elle vérifie **TCP**.

Merci pour votre attention !!