Premiers pas vers la conjecture de Mañé en topologie C^2

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis

11 mars 2011

Cadre de travail

Soit M une variété compacte de dimension n

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 2)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **Convexité uniforme dans les fibres.** $\forall (x,p) \in T^*M$, la Hessienne $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x,p)$ est définie positive.
- **Croissance sur-linéaire.** Pour tout $K \geq 0$ il existe une constante $C(K)$ telle que

$$\forall (x,p) \in T^*M, \quad H(x,p) \geq K|p|_x + C(K).$$

Exemples

- **Hamiltoniens sur le tore $\mathbb{T}^n$**
  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 2)$
  $\mathbb{Z}^n$-périodique en x
  uniformément convexe et sur-linéaire en p

Université Nice Sophia Antipolis

Exemples

- **Hamiltoniens sur le tore $\mathbb{T}^n$**
  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 2)$
  $\mathbb{Z}^n$-périodique en x
  uniformément convexe et sur-linéaire en p
- **Hamiltoniens mécaniques**
  $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ potentiel de classe C^k $(k \geq 2)$
  g métrique riemannienne sur M
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + V(x)$

Exemples

- **Hamiltoniens sur le tore $\mathbb{T}^n$**
  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k $(k \geq 2)$
  $\mathbb{Z}^n$-périodique en x
  uniformément convexe et sur-linéaire en p
- **Hamiltoniens mécaniques**
  $V : M \to \mathbb{R}$ potentiel de classe C^k $(k \geq 2)$
  g métrique riemannienne sur M
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + V(x)$
- **Hamiltoniens de Mañé**
  X champ de vecteur de classe C^k $(k \geq 2)$ sur M
  g métrique riemannienne sur M
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + p \cdot X(x)$

Université Nice Sophia Antipolis

Valeur critique de H

On a pour toute fonction $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1,

$$H(x, d_x u) \leq c_H(u) := \max\Big\{ H(x, d_x u) \,|\, x \in M \Big\}.$$

On dit que u est **sous-solution** pour la valeur $c = c_H(u)$.

Université Nice Sophia Antipolis

Valeur critique de H

On a pour toute fonction $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1,

$$H(x, d_x u) \leq c_H(u) := \max \Big\{ H(x, d_x u) \,|\, x \in M \Big\}.$$

On dit que u est **sous-solution** pour la valeur $c = c_H(u)$.

Définition

On appelle **valeur critique** *de H le nombre*

$$c[H] := \inf \Big\{ c_H(u) \,|\, u \in C^1(M) \Big\}$$

Sous-solutions critiques

Théorème (Fathi-Siconolfi, 2004)

Il existe une function $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$H(x, d_x u) \leq c[H] \qquad \forall x \in M.$$

On appelle **sous-solution critique** toute fonction $u : M \to \mathbb{R}$ Lipschitz telle que

$$H(x, d_x u) \leq c[H] \qquad \text{p.p. } x \in M.$$

Sous-solutions critiques

Théorème (Fathi-Siconolfi, 2004)

Il existe une function $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$H(x, d_x u) \leq c[H] \qquad \forall x \in M.$$

On appelle **sous-solution critique** toute fonction $u : M \to \mathbb{R}$ Lipschitz telle que

$$H(x, d_x u) \leq c[H] \qquad \text{p.p. } x \in M.$$

Théorème (Bernard, 2007)

Il existe une function $u : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ telle que

$$H(x, d_x u) \leq c[H] \qquad \forall x \in M.$$

Ce dernier résultat est optimal.

Ensembles d'Aubry

Définition

On appelle **ensemble d'Aubry** *de H l'ensemble défini par :*

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) := \bigcap_{u \in \mathcal{SS}^1} \Big\{ (x, d_x u) \,|\, x \in M \text{ t.q. } H(x, d_x u) = c[H] \Big\},$$

où $\mathcal{SS}^1$ désigne l'ensemble des sous-solutions critiques C^1.

Ensembles d'Aubry

Définition

On appelle **ensemble d'Aubry** *de H l'ensemble défini par :*

$$\tilde{\mathcal{A}}(H) := \bigcap_{u \in \mathcal{SS}^1} \left\{ (x, d_x u) \,|\, x \in M \text{ t.q. } H(x, d_x u) = c[H] \right\},$$

où $\mathcal{SS}^1$ désigne l'ensemble des sous-solutions critiques C^1.

Théorème

L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ est un compact non-vide de T^*M invariant par le flot hamiltonien et est un graphe Lipschitz au dessus de M. De plus, toute sous-solution critique Lipschitz est différentiable sur $\mathcal{A}(H) := \pi(\tilde{\mathcal{A}}(H))$ et satisfait

$$(x, d_x u) \in \tilde{\mathcal{A}}(H) \qquad \forall x \in \mathcal{A}(H).$$

Exemples

- **Hamiltoniens mécaniques**
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + V(x)$
  $c[H] = \max_{x \in M} V(x)$
  $u \equiv 0$ est une sous-solution critique
  $\tilde{\mathcal{A}}(H) = \{(x,0) \mid V(x) = c[H]\}$
  Les points de $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ sont des points d'équilibre de ϕ_t^H

Exemples

- **Hamiltoniens mécaniques**
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + V(x)$
  $c[H] = \max_{x \in M} V(x)$
  $u \equiv 0$ est une sous-solution critique
  $\tilde{\mathcal{A}}(H) = \{(x,0) \,|\, V(x) = c[H]\}$
  Les points de $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ sont des points d'équilibre de ϕ_t^H
- **Hamiltoniens de Mañé**
  $H(x,p) = \frac{1}{2}|p|_x^2 + p \cdot X(x)$
  $c[H] = 0$
  $u \equiv 0$ est une (sous-)solution critique
  $\tilde{\mathcal{A}}(H) = \{(x,0) \,|\, x \in \mathcal{A}(H)\}$
  Les projections d'orbites hamiltoniennes de $\tilde{\mathcal{A}}(H)$ sur M sont des orbites du flot de X.

Conjecture de Mañé

Conjecture (Mañé, 1996)

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 2)$ vérifiant les propriétés de convexité uniforme dans les fibres et de croissance sur-linéaire.
Alors il existe un ensemble résiduel $\mathcal{G}$ de $C^k(M)$ tel que pour tout potentiel $V \in \mathcal{G}$, l'ensemble d'Aubry de $H_V := H + V$ est soit un point d'équilibre soit une orbite périodique.

C^1 closing lemma

Théorème (Pugh, 1967)

Soit X un champ de vecteur de classe C^1 sur M et $\bar{x}$ un point récurrent pour le flot de X. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ Y de classe C^1 vérifiant $\|X - Y\|_{C^1} < \epsilon$ dont l'orbite passant par $\bar{x}$ est fermée.

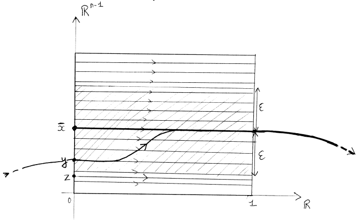
Exercice : C^0 closing lemma

Exercice

Soit X un champ de vecteur de classe C^2 sur M et $\bar{x}$ un point récurrent pour le flot de X. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un champ Y de classe C^1 vérifiant $\|X - Y\|_{C^0} < \epsilon$ dont l'orbite passant par $\bar{x}$ est fermée.

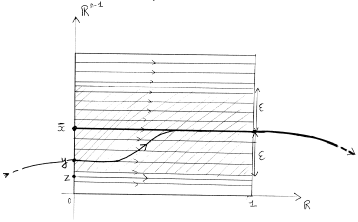
Exercice : C^0 closing lemma (solution)

Solution : Quitte à redresser, on a localement $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.



Exercice : C^0 closing lemma (solution)

Solution : Quitte à redresser, on a localement $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.



On pose

$$Y(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu(x_1)\nu(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

avec

$$\int_0^1 \mu(t)dt = \bar{x} - y, \quad \mathrm{Supp}(\mu) \subset]0,1[, \quad 0 \leq \mu < \epsilon,$$

$$\mathrm{Supp}(\nu) \subset]\bar{x}_2 - \epsilon, \bar{x}_2 + \epsilon[, \quad 0 \leq \nu \leq 1,$$

$$\text{et} \quad \nu\left(]y_2, \bar{x}_2[\right) = 1.$$

Exercice : C^0 closing lemma (solution)

La preuve du closing lemma en topologie C^1 nécessite de faire un nombre fini de connexions dans des boites disjointes.

Exercice : C^0 closing lemma (solution)

La preuve du closing lemma en topologie C^1 nécessite de faire un nombre fini de connexions dans des boites disjointes.

Il existe une version hamiltonienne du closing lemma :

Théorème (Pugh-Robinson, 1983)

Soit H un Hamiltonien de classe C^2 sur T^*M et $(\bar{x}, \bar{p})$ un point récurrent pour le flot hamiltonien ϕ_t^H. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un Hamiltonien K de classe C^2 vérifiant $\|H - K\|_{C^2} < \epsilon$ dont l'orbite passant par $(\bar{x}, \bar{p})$ est fermée.

Exercice : C^0 closing lemma (solution)

La preuve du closing lemma en topologie C^1 nécessite de faire un nombre fini de connexions dans des boites disjointes.

Il existe une version hamiltonienne du closing lemma :

Théorème (Pugh-Robinson, 1983)

Soit H un Hamiltonien de classe C^2 sur T^*M et $(\bar{x}, \bar{p})$ un point récurrent pour le flot hamiltonien ϕ_t^H. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un Hamiltonien K de classe C^2 vérifiant $\|H - K\|_{C^2} < \epsilon$ dont l'orbite passant par $(\bar{x}, \bar{p})$ est fermée.

Un contrôle en topologie C^2 sur un Hamiltonien induit un contrôle en topologie C^1 sur le champ de vecteur hamiltonien associé.

Un premier pas vers la conjecture de Mañé C^2

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 2)$ vérifiant les propriétés de convexité uniforme dans les fibres et de croissance sur-linéaire.
Soit $\bar{x}$ un point récurrent de $\mathcal{A}(H)$, $u : M \to \mathbb{R}$ une sous-solution critique, et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $\mathcal{O}^+(\bar{x})$ tel que :

- *u est C^2 sur $\mathcal{V}$;*
- *$H(x, d_x u) = c[H], \forall x \in \mathcal{V}$.*

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un potentiel $V : M \to \mathbb{R}$ de classe C^k tel que $\|V\|_{C^2} < \epsilon$, $c[H_V] = c[H]$, et $\tilde{A}(H_V)$ est soit un point d'équilibre soit une orbite périodique.

Deuxième pas vers la conjecture de Mañé C^2

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 4)$ vérifiant les propriétés de convexité uniforme dans les fibres et de croissance sur-linéaire.
Soit $\bar{x}$ un point récurrent de $\mathcal{A}(H)$, $u : M \to \mathbb{R}$ une sous-solution critique, et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $\mathcal{O}^+(\bar{x})$ tel que u est C^{k+1} sur $\mathcal{V}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un potentiel $V : M \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} tel que $\|V\|_{C^2} < \epsilon$, $c[H_V] = c[H]$, et $\tilde{\mathcal{A}}(H_V)$ est soit un point d'équilibre soit une orbite périodique.

Université Nice Sophia Antipolis

- **Étape 1 :** Fermeture de l'orbite par un potentiel V

Schéma de preuve

- **Étape 1 :** Fermeture de l'orbite par un potentiel V

- **Étape 2 :** Construction d'une sous-solution $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de

$$H(x, d_x v) + V(x) \leq c[H].$$

Schéma de preuve

- **Étape 1 :** Fermeture de l'orbite par un potentiel V et contrôle de l'action de l'orbite fermée.

- **Étape 2 :** Construction d'une sous-solution $v : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de

$$H(x, d_x v) + V(x) \leq c[H].$$

Point de vue lagrangien

Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ le Lagrangien de Tonelli associé à H par dualité de Legendre-Fenchel :

$$L(x,v) = \max_{p \in T_x^*M} \Big\{ p \cdot v - H(x,p) \Big\} \qquad \forall (x,v) \in T_xM.$$

Point de vue lagrangien

Soit $L : TM \to \mathbb{R}$ le Lagrangien de Tonelli associé à H par dualité de Legendre-Fenchel :

$$L(x,v) = \max_{p \in T_x^*M} \left\{ p \cdot v - H(x,p) \right\} \qquad \forall (x,v) \in T_xM.$$

Proposition

On a

$$c[H] = -\inf \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T L\left(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt \right\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des $T > 0$ et des courbes lipschitziennes $\gamma : [0,T] \to M$ telles que $\gamma(0) = \gamma(T)$.

Université Nice Sophia Antipolis

Un problème de contrôle

Soit $\big(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot)\big) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ solution du système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{x}}(t) & = & \nabla_p H\big(\bar{x}(t), \bar{p}(t)\big) \\ \dot{\bar{p}}(t) & = & -\nabla_x H\big(\bar{x}(t), \bar{p}(t)\big) \end{array} \right. \qquad \forall t \in [0,1]$$

et $\big(\hat{x}, \hat{p}\big)$ proche de $\big(\bar{x}(1), \bar{p}(1)\big)$.

Un problème de contrôle

Soit $\big(\bar{x}(\cdot), \bar{p}(\cdot)\big) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ solution du système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\bar{x}}(t) & = & \nabla_p H\big(\bar{x}(t), \bar{p}(t)\big) \\ \dot{\bar{p}}(t) & = & -\nabla_x H\big(\bar{x}(t), \bar{p}(t)\big) \end{array} \right. \qquad \forall t \in [0,1]$$

et $\big(\hat{x}, \hat{p}\big)$ proche de $\big(\bar{x}(1), \bar{p}(1)\big)$.

Comment construire $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \nabla_p H\big(x(t), p(t)\big) \\ \dot{p}(t) & = & -\nabla_x H\big(x(t), p(t)\big) - \nabla V(x(t)) \end{array} \right. \qquad \forall t \in [0,1]$$

avec $\big(x(0), p(0)\big) = \big(\bar{x}(0), \bar{p}(0)\big)$ vérifie

$$\big(x(1), p(1)\big) = \big(\hat{x}, \hat{p}\big) \quad ?$$

Un problème de contrôle (suite)

On regarde le problème de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \nabla_p H\big(x(t), p(t)\big) \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_x H\big(x(t), p(t)\big) - u(t) \end{cases}$$

et donc l'application entrée-sortie

$$\mathcal{E}^{(x(0),p(0)),1} \; : \; u(\cdot) \longmapsto \big(x_u(1), p_u(1)\big)$$

Université Nice Sophia Antipolis

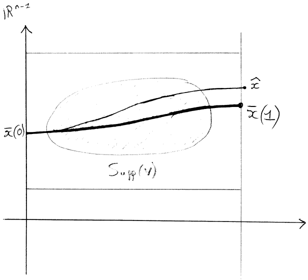
Un problème de contrôle (suite)

On regarde le problème de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \nabla_p H\big(x(t), p(t)\big) \\ \dot{p}(t) &= -\nabla_x H\big(x(t), p(t)\big) - u(t) \end{cases}$$

et donc l'application entrée-sortie

$$\mathcal{E}^{(x(0),p(0)),1} : u(\cdot) \longmapsto \big(x_u(1), p_u(1)\big)$$



$$u(t) \longrightarrow \nabla V\big(x_u(t)\big)$$

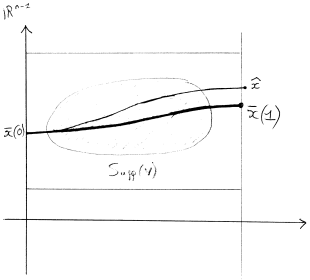
Un problème de contrôle (suite)

On regarde le problème de contrôle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \nabla_p H\big(x(t), p(t)\big) \\ \dot{p}(t) & = & -\nabla_x H\big(x(t), p(t)\big) - u(t) \end{cases}$$

et donc l'application entrée-sortie

$$\mathcal{E}^{(x(0),p(0)),1} \, : \, u(\cdot) \longmapsto \big(x_u(1), p_u(1)\big)$$



$$u(t) \rightarrow \nabla V\big(x_u(t)\big)$$

Il faut $\displaystyle \int_0^1 \langle u(t), \dot{x}_u(t) \rangle dt = 0$!!

Un deuxième problème de contrôle

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 4)$ vérifiant les propriétés de convexité uniforme dans les fibres et de croissance sur-linéaire.
Soit $\bar{x}$ un point récurrent de $\mathcal{A}(H)$, $u : M \to \mathbb{R}$ une sous-solution critique, et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $\mathcal{O}^+(\bar{x})$ tel que u est C^{k+1} sur $\mathcal{V}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un potentiel $V : M \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} tel que $\|V\|_{C^2} < \epsilon$, $c[H_V] = c[H]$, et $\tilde{\mathcal{A}}(H_V)$ est soit un point d'équilibre soit une orbite périodique.

Un deuxième problème de contrôle

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit $H : T^*M \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien de classe C^k $(k \geq 4)$ vérifiant les propriétés de convexité uniforme dans les fibres et de croissance sur-linéaire.
Soit $\bar{x}$ un point récurrent de $\mathcal{A}(H)$, $u : M \to \mathbb{R}$ une sous-solution critique, et $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de $\mathcal{O}^+(\bar{x})$ tel que u est C^{k+1} sur $\mathcal{V}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un potentiel $V : M \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} tel que $\|V\|_{C^2} < \epsilon$, $c[H_V] = c[H]$, et $\tilde{\mathcal{A}}(H_V)$ est soit un point d'équilibre soit une orbite périodique.

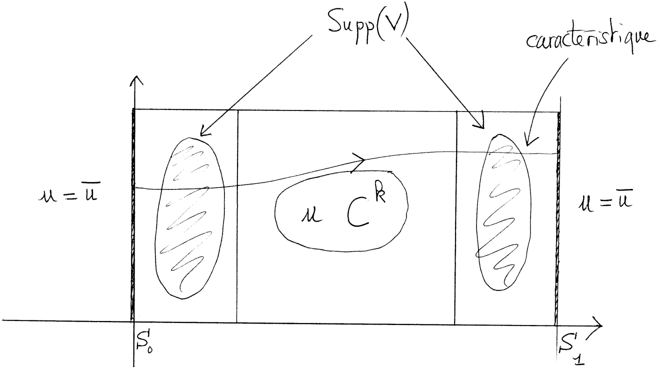
La régularité maximale attendue pour une sous-solution critique est $C^{1,1}$!!

Un deuxième problème de contrôle (suite)

Soit $\bar{u}$ une solution C^2 de $H\left(x, d_x \bar{u}\right) = c[H]$. Peut on trouver un potentiel V de classe C^2 tel que la solution u de

$$\begin{cases} H(x, d_x u) + V(x) = c[H] \\ u_{|S_0} = \bar{u} \end{cases}$$

vérifie



et a la même application de Poincaré que $\bar{u}$ entre S_0 et S_1 ?