M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, `http://math1.unice.fr/~cgiraud/ens.html`
Sylvain Rubenthaler, `http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du TD 0

On cherche à prouver les formules de la p. 8 du cours :

$$S_0 = \mathbb{E}^*(e^{-rN}S_n) \quad \text{et} \quad C = \mathbb{E}^*(e^{-rN}g(S_N)) \ .$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(e^{-rN}S_n) &= p^* e^{-rN}S_+ + (1-p^*)e^{-rN}S_- \\
&= \left(\frac{e^{rN}S_0 - S_-}{S_+ - S_-}\right) e^{-rN}S_+ + \left(1 - \frac{e^{rN}S_0 - S_-}{S_+ - S_-}\right) e^{-rN}S_- \\
&= \frac{S_0S_+ - e^{-rN}S_-S_+ + e^{-rN}S_-S_+ - e^{-rN}S_-^2 - S_0S_- + e^{-rN}S_-^2}{S_+ - S_-} \\
&= S_0 \ ,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(e^{-rN}g(S_N)) &= p^*e^{-rN}g(S_+) + (1-p^*)e^{-rN}g(S_-) \\
&= p^*e^{-rN}g(S_+) + (1-p^*)e^{-rN}g(S_-) \\
&= \frac{e^{rN}S_0 - S_-}{S_+ - S_-}e^{-rN}g(S_+) + \left(1 - \frac{e^{rN}S_0 - S_-}{S_+ - S_-}\right) e^{-rN}g(S_-) \\
&= \frac{g(S_+) - g(S_-)}{S_+ - S_-}(S_0 - e^{-rNS_-}) + e^{-rN}g(S-)
\end{aligned}$$

que l'on compare à :

$$\begin{aligned}
C &= \beta + \gamma S_0 \\
&= \frac{e^{-rN}}{2}\left(g(S_+) + g(S_-) - \frac{S_+ + S_-}{S_+ - S_-}(g(S_+) - g(S_-))\right) + S_0\frac{g(S_+) - g(S_-)}{S_+ - S_-} \\
&= \frac{(g(S_+) - g(S_-))}{S_+ - S_-}\left(S_0 - \frac{e^{-rN}(S_+ + S_-)}{2}\right) + \frac{e^{-rN}}{2}(g(S_+) + g(S_-)) \\
&= \frac{(g(S_+) - g(S_-))}{S_+ - S_-}\left(S_0 - e^{-rN}S_-\right) + \frac{(g(S_+) - g(S_-))}{S_+ - S_-}\frac{e^{-rN}}{2}(S_- - S_+) + e^{-rN}g(S_-) \\
&= \frac{(g(S_+) - g(S_-))}{S_+ - S_-}\left(S_0 - e^{-rN}S_-\right) + e^{-rN}g(S_-) \ .
\end{aligned}$$

On a donc bien $C = \mathbb{E}^*(e^{-rN}g(S_N))$.