M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du TD 1

Exercice 1 : un jeu télévisé.

On numérote les portes. On suppose que la no. 1 est la porte choisie par le candidat. On suppose que la no. 2 est la porte ouverte par l'animateur. On appelle C_i l'événement "le cadeau est derrière la porte i". On appelle R_2 l'événement "l'animateur ouvre la porte 2 et il n'y a rien derrière". Si le candidat décide de tirer à pile ou face, on note X le no. de la porte qu'il choisit, on a ainsi $\mathbb{P}(X=1)=1/2, \mathbb{P}(X=3)=1/2$ et X est indépendant des événements C_i, R_2.

Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{P}(C_1|R_2)$ (probabilité de gagner si on reste sur la même porte), $\mathbb{P}(C_3|R_2)$ (probabilité de gagner si on change de porte), $p(C_X|R_2)$ (le cadeau est derrière la porte tirée à pile ou face) en se rammenant à des probabilités connues.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_1|R_2) &= \mathbb{P}(R_2|C_1)\frac{\mathbb{P}(C_1)}{p(R_2)} \quad \text{(formule de Bayes)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1/3)}{\mathbb{P}(R_2)} \ .
\end{aligned}$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_2|C_1)\mathbb{P}(C_1)+\mathbb{P}(R_2|C_2)\mathbb{P}(C_2)+\mathbb{P}(R_2|C_3)\mathbb{P}(C_3) \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2} \ .
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(C_1|R_2)=\frac{1}{3} \ .$$

De même :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_3|R_2) &= \mathbb{P}(R_2|C_3)\frac{\mathbb{P}(C_3)}{\mathbb{P}(R_2)} \\
&= 1\times\frac{(1/3)}{(1/2)} \\
&= \frac{2}{3} \ .
\end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_X\cap R_2) &= \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=1, \omega\in C_1, \omega\in R_2\}\cup\{\omega : X(\omega)=3, \omega\in C_3, \omega\in R_2\}) \\
\text{(réunion disjointe)} &= \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=1, \omega\in C_1, \omega\in R_2\})+\mathbb{P}(\{\omega : X(\omega)=3, \omega\in C_3, \omega\in R_2\}) \\
\text{(indépendance)} &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(C_1\cap R_2)+\mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(C_3\cap R_2) \ .
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_X|R_2) &= \frac{\mathbb{P}(C_X \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(C_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(C_3 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C_1|R_2) + \mathbb{P}(C_3|R_2)\right) \\
&= \frac{1}{2} \; .
\end{aligned}$$

Conclusion : la meilleure stratégie est de changer de porte.

Exercice 2 : un dé et une pièce de monnaie

1. On sait que (pour $1 \leq j \leq 6$) $\mathbb{P}(S = i|D = j) = \mathbb{P}(\text{avoir } i \text{ piles sur } j \text{ pile ou faces}) = \mathbf{1}_{0 \leq i \leq j} C_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j$. On calcule : $\mathbb{P}(S = i, D = j) = \mathbb{P}(S = i|D = j)\mathbb{P}(D = j) = \mathbf{1}_{0 \leq i \leq j} C_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{6}$ (voir cours de DEUG). On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = i) &= \sum_{j=1}^{6} \mathbb{P}(S = i, D = j) \\
&= \sum_{j=i}^{6} C_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{6} \; .
\end{aligned}$$

   Donc : $\mathbb{P}(S = 6)\mathbb{P}(D = 6) = \frac{1}{2^6}\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2^6}\frac{1}{6} = \mathbb{P}(S = 6, D = 6)$. Donc S et D ne sont pas indépendantes.

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S|D = 4) &= \sum_{i=0}^{4} i\mathbb{P}(S = i|D = 4) \\
&= \sum_{i=0}^{4} iC_4^i \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^4 (4 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4) \\
&= 2 \; .
\end{aligned}$$

3. Pour $1 \leq j \leq 6$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S|D = j) &= \sum_{i=0}^{j} i\mathbb{P}(S = i|D = j) \\
&= \sum_{i=0}^{j} iC_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
&= \sum_{i=1}^{j} iC_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \; .
\end{aligned}$$

   On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall j \geq 1$: $\sum_{i=0}^{j} C_j^i x^i = (1 + x)^j$. On dérive les deux termes de cette égalité par rapport à x : $\sum_{i=1}^{j} iC_j^i x^{i-1} = j(1 + x)^{j-1}$.
   On a donc (en regardant l'égalité précédente en $x = 1$) :

$$\mathbb{E}(S|D=j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j j2^{j-1} = \frac{j}{2} \ .$$

Autre méthode : $\forall i, 1 \leq i \leq j,\ C_j^i = i\frac{j!}{i!(j-i)!} = j\frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-1-(i-1))!} = jC_{j-1}^{i-1}$. Donc (par un changement d'indice) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j} i\ C_j^i \left(\frac{1}{2}\right)^j &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \sum_{i=1}^{j} jC_{j-1}^{i-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j j \sum_{k=0}^{j-1} C_{j-1}^k 1^k 1^{j-k} \\ \text{(formule du binôme)} \quad &= \left(\frac{1}{2}\right)^j j(1+1)^{j-1} \\ &= \frac{j}{2} \ . \end{aligned}$$

Remarque : ces techniques sont supposées connues depuis le DEUG.

4.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{6} \mathbb{E}(S|D=j)\mathbb{P}(D=j) &= \sum_{j=1}^{6}\sum_{i=0}^{j} i\mathbb{P}(S=i|D=j)\mathbb{P}(D=j) \\ &= \sum_{i=0}^{6} i \sum_{j=i}^{6} \mathbb{P}(S=i|D=j)\mathbb{P}(D=j) \\ \text{(formule de la "probabilité totale")} \quad &= \sum_{i=0}^{6} i\mathbb{P}(S=i) = \mathbb{E}(S) \ . \end{aligned}$$

Remarque : la formule dite de la "probabilité totale" s'applique car les événements $D=j$ sont deux à deux disjoints, cette formule se retrouve très facilement. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{j=1}^{6} \mathbb{E}(S|D=j)\mathbb{P}(D=j) \\ &= \sum_{j=1}^{6} \frac{j}{2}\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12}(1+2+\cdots+6) = \frac{7}{4} \ . \end{aligned}$$