M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

TD no2 : Le bandit manchot

Vous jouez au casino avec une machine à sous. Votre fortune initiale est de k euros et vous pariez 1 euro à la fois. Vous décidez de vous arrêter soit lorque vous êtes ruiné, soit lorque vous avez atteint N euros (N est un nombre que vous vous êtes fixé à l'avance). A chaque coup, soit vous gagnez (avec probabilité p) et recevez le double de votre mise, soit vous perdez (avec probabilité $q = 1 - p$) et vous perdez votre mise. On note p_k la probabilité de finir ruiné en ayant initialement k euros. En particulier $p_0 = 1$ et $p_N = 0$.

A- Probabilité de gain

1. Montrez en conditionnant par rapport à la première étape, que $p_k = p\, p_{k+1} + q\, p_{k-1}$.
2. Cherchez une solution p_k de la forme $p_k = A + B \left(\frac{q}{p}\right)^k$ où A et B sont des constantes à déterminer. Que vaut p_k si $p = q = 1/2$?

B- Temps moyen du jeu

On appelle T le temps de jeu, c'est à dire le nombre de coup avant que le jeu s'arrête. On note $\mathbb{E}_k(T)$ l'espérance de T lorsque initialement on possède k euros.

1. Etablir la relation $\mathbb{E}_k(T) = p\, \mathbb{E}_{k+1}(T) + q\, \mathbb{E}_{k-1}(T) + 1$.
2. Cherchez une solution de la forme

$$\mathbb{E}_k(T) = \frac{k}{q-p} + A + B \left(\frac{q}{p}\right)^k .$$

C- Temps d'arrivée du premier et second gain

On oublie à présent le fait que le jeu puisse s'arrêter. On note T_1 le premier temps où la machine perd, et T_2 le second temps où la machine perd.

1. Pour $i \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbb{P}(T_1 = i)$? Quelle est la loi suivie par T_1?

2. Montrer que $\mathbb{P}(T_2 = i + j | T_1 = i) = \mathbb{P}(T_1 = j)$. Cela signifie que conditionnellement à $T_1 = i$, on a $T_2 = i + G$ où G suit une loi géomètrique.

3. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_2 | T_1 = i) = i + \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T_2) = \frac{2}{p}.$$