UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé du devoir

1. On rappelle qu'un vecteur gaussien est caractérisé par sa matrice de covariance. On a donc le système :
$$\begin{cases}\alpha_1^2+\alpha_2^2=1\\ \beta_1^2+\beta_2^2=1\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=\rho\end{cases}$$
Si on pose $\rho=\cos(\theta)$, on remarque que $\alpha_1=\cos(\theta),\alpha_2=\sin(\theta),\beta_1=1,\beta_2=0$ est une solution. D'autres choix sont possibles, par exemple $\beta_1=0$ et $\beta_2=1$ conduit à des calculs plus simples.

2. On calcule une valeur approchée de la variance $\hat{\sigma}^2$. Soit $\eta=0.1$, $\epsilon=0.05$. On prend des X_i i.i.d. de même loi que X et on veut n tel que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n}{n}-I\right|\geq\eta\right) &\leq \epsilon\\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+\dots+X_n-nI}{\sigma\sqrt{n}}\right|\geq\frac{\eta\sqrt{n}}{\sigma}\right) &\leq \epsilon\end{aligned}$$
On voit sur la table de la loi normale qu'il suffit de prendre n tel que $\frac{\eta\sqrt{n}}{\sigma}=1.65$ et donc plus ou moins $\frac{\eta\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}=1.65$. La calculatrice nous donne n.

3. On remarque que $\forall\alpha$:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha g_1}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x}\frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2+\frac{\alpha^2}{2}\right)dx=e^{\alpha^2/2}\ . \qquad (1)\end{aligned}$$
On a : $\mathbb{E}(e^{\sigma_1G_1+\sigma_2G_2})=\mathbb{E}(e^{(\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\beta_1)g_1+\sigma_1\alpha_2g_2})=\mathbb{E}(e^{(\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\beta_1)g_1})\mathbb{E}(e^{\sigma_1\alpha_2g_2})$. Et on termine le calcul avec la formule (1) :
$$\mathbb{E}(e^{\sigma_1G_1+\sigma_2G_2})=\exp\left(\frac{1}{2}\left((\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\beta_1)^2+(\sigma_1\alpha_2)^2\right)\right)\ .$$

4. On peut prendre $C_1e^{\lambda_1G_1}+C_2e^{\lambda_3G_2}$ comme variable de contrôle.

5.
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_1) &= \mathbb{E}(e^{2\lambda_1G_1})-\mathbb{E}(e^{\lambda_1G_1})^2=e^{2\lambda_1^2}-e^{\lambda_1^2/2}\\ \mathrm{Var}(Y_2) &= \mathbb{E}(e^{2\lambda_2G_2})-\mathbb{E}(e^{\lambda_2G_2})^2=e^{2\lambda_2^2}-e^{\lambda_2^2/2}\\ \mathbb{E}(Y_1Y_2)-\mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2) &= e^{\frac{1}{2}\left((\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1)^2+(\lambda_1\alpha_2)^2\right)}-e^{(\lambda_2^2+\lambda_1^2)/2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X-\mu_1Y_1-\mu_2Y_2) &= \mathrm{Var}(x)+\mu_1^2\mathrm{Var}(Y_1)+\mu_2^2\mathrm{Var}(Y_2)\\
&\qquad +2\mu_1\mu_2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)-2\mu_1\mathrm{Cov}(X,Y_1-2\mu_2\mathrm{Cov}(X,Y_2)\\
&=: a\mu_1^2+b\mu_2^2+2c\mu_1\mu_2-d\mu_1-e\mu_2+f =: \psi(\mu_1,\mu_2)
\end{aligned}
$$

avec a,b,c,d,e,f les variances et covariances voulues.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\mu_1} &= 2a\mu_1+2c\mu_2-d\\
\frac{\partial\psi}{\partial\mu_2} &= 2b\mu_2+2c\mu_1-e
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & c\\ c & b\end{vmatrix} = ab-c^2 &= \mathrm{Var}(Y_1)\mathrm{Var}(Y_2)-\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)\\
&= \mathbb{E}((Y_1-\mathbb{E}(Y_1))^2)\mathbb{E}((Y_2-\mathbb{E}(Y_2))^2)-\mathbb{E}((Y_1-\mathbb{E}(Y_1))(Y_2-\mathbb{E}(Y_2)))^2\geq 0
\end{aligned}
$$

par Cauchy-Schwarz et c'est en fait $\neq 0$ car Y_1 et Y_2 ne sont pas colinéaires. Donc on a un unique couple (μ_1^0,μ_2^0) qui annule $\frac{\partial\psi}{\partial\mu_1}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial\mu_2}$. On regarde alors la matrice des dérivées secondes :

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_1^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_1\partial\mu_2}\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_1\partial\mu_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu_2^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b\\ 2c & 2c\end{bmatrix}
$$

de polynôme caractéristique : $4(X^2-(a+b)X-+ab-c^2)$ et qui a donc deux racines >0. Donc le point (μ_1^0,μ_2^0) est un minimum local. Comme en plus, il est tout seul dans son cas et que ψ part l'infini quand $\mu_1,\mu_2\to\infty$, (μ_1^0,μ_2^0) est un minimum global.
Le programme doit calculer $\mathrm{Cov}(X,Y_1),\mathrm{Cov}(X,Y_2)$ (de manière approchée) puis les utiliser pour calculer μ_1^0,μ_2^0.

6. On va faire un changement de variable en $x+\mu=u, v=y$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\mu g_1-\frac{\mu^2}{2}}f(g_1+\mu,g_2)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x-\mu^2/2}f(x+\mu,y)e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu u+\mu^2-\mu^2/2}f(u,v)e^{-u^2/2+\mu u-\mu^2/2}e^{-v^2/2}dudv\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u,v)e^{-u^2/2}e^{-v^2/2}dudv = \mathbb{E}(f(g_1,g_2))\ .
\end{aligned}
$$

On remarque que l'on a aussi pour toute fonction f : $\mathbb{E}(e^{-\mu g_1-\frac{\mu^2}{2}}f(g_1,g_2+\mu))=\mathbb{E}(f(g_1,g_2))$.
On calcule en appliquant ces deux formules :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{-\mu G_1-\frac{\mu^2}{2}}f(G_1+\mu_1,G_2+\mu_2)) =\\
&\mathbb{E}(e^{-\mu(\alpha_1g_1+\alpha_2g_2)-\mu^2/2}f(\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\mu_1,g_1+\mu_2)) =\\
&\mathbb{E}\left(\exp\left(-\mu\alpha_2g_2-\frac{\mu^2}{2}+\frac{(\mu\alpha_1)^2}{2}\right)f(\alpha_1(g_1-\mu\alpha_1)+\alpha_2g_2+\mu_1,(g_1-\mu\alpha_1)+\mu_2)\right) =\\
&\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}+\frac{(\mu\alpha_1)^2}{2}+\frac{(\mu\alpha_2)^2}{2}\right)f(\alpha_1g_1-\mu\alpha_1^2+\alpha_2(g_2-\mu\alpha_2)+\mu_1,g_1-\mu\alpha_1+\mu_2)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(f(\alpha_1g_1+\alpha_2g_2+\mu_1-\mu,g_1-\mu\alpha_1+\mu_2)\right)\ .
\end{aligned}
$$

Donc on prend :

$$
\mu_1=\mu \text{ et } \mu_2=\frac{\mu}{\alpha_1}\ .
$$

7. On a $\mathbb{E}(X_\mu) = \mathbb{E}(X)$ par la question précédente. On applique encore la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_\mu^2) &= \mathbb{E}(e^{-\mu G_1 - \mu^2/2} e^{-\mu G_1 - \mu^2/2} \phi(G_1 + \mu, G_2 + \mu)^2) \\
&= \mathbb{E}(e^{-\mu(G_1 - \mu) - \mu^2/2} \phi(G_1, G_2 + \mu)^2) \\
&= \mathbb{E}(e^{-\mu G_1 + \mu^2/2} \phi(G_1, G_2)^2) \ .
\end{aligned}$$

Donc on a l'expression voulue pour $\mathrm{Var}(X_\mu)$.
On suppose que $|\mu| \leq M$ ($M > 0$ fixé)

- $\forall \omega$, $\mu \mapsto e^{-\mu G_1 + \mu^2/2} \phi(G_1, G_2)^2$ est dérivable
- $\forall \mu \leq M$, $\forall \omega$, $\frac{\partial}{\partial \mu} e^{-\mu G_1 + \mu^2/2} \phi(G_1, G_2)^2 = e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2$ et $\left| e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2 \right| \leq \left| e^{M^2/2} \phi(G_1, G_2)^2 \right|$ d'espérance finie.

donc par théorème de dérivation et puisque c'est vrai $\forall M$, on a pour tout μ :

$$\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} = \mathbb{E}((-G_1 + \mu) e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2) \ .$$

8. Sous les hypothèses de l'énoncé : $G_1(\omega) \leq \mu$ implique $C_1 e^{\lambda_1 G_1(\omega)} - K \leq C_1 e^{\lambda_1 \mu} \leq K$ et donc implique $(C_1 e^{\lambda_1 G_1(\omega)} - K)_+ = 0$. Donc $\forall \omega$, $(-G_1 + \mu) e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2 \leq 0$ donc $\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} \leq 0$. Donc on a intérête à choisir $\mu = d_1$ pour avoir une "petite" variance. Le calcul des intervalles de confiance se fait comme dans la question 2.