UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 2 MASS - Probabilités numériques - 2004-2005 - 1er semestre
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Devoir numéro 1

Vous rendrez une copie et des fichiers .c (expédiés par mail ou sur une disquette) commentés (avec les numéros des questions, ce que fait telle boucle ...) qui calculent les quantités demandées et les affichent. Vous écirez sur votre copie tous les résultats numériques. À chaque fois que l'on demande d'écrire un programme, il est sous-entendu que l'on attend une justification de la méthode. Dans les noms des fichiers figureront votre nom et le numéro de la question, par exemple : rubenthaler-question-1.c, rubenthaler-questions-3-6.c ... Des liens utiles sur le langage C se trouvent sur
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html.

On considère un vecteur gaussien (G_1, G_2) où G_1 et G_2 sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et telles que $\mathrm{Cov}(G_1, G_2) = \rho$ avec $-1 < \rho < 1$. Le but de ce problème est de comparer diverses méthodes de réduction de variance pour le calcul de

$$I = \mathbb{E}((C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+) \ .$$

On pose :

$$X = (C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2} - K)_+ \ .$$

Sauf dans la dernière question, on prendra les constantes suivantes $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1,2$, $K = 1$, $\rho = 1/2$.

1. Soient g_1 et g_2 de loi $\mathcal{N}(0,1)$, *indépendantes*. Trouver des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ telles que $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) \overset{\text{loi}}{=} (G_1, G_2)$. En déduire une méthode de simulation de (G_1, G_2).

2. On veut calculer I par une méthode de Monte-Carlo simple. Écrire un programme qui calcule la variance de cette méthode. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo pour avoir un résultat I_n qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire une suite au programme précédent qui calcule I à 0.1 près avec 95% de chances.

3. Calculer $\mathbb{E}(e^{\sigma_1 G_1 + \sigma_2 G_2})$ pour σ_1 et σ_2 deux nombres réels.

4. Expliciter $\mathbb{E}(C_1 e^{\lambda_1 G_1} + C_2 e^{\lambda_2 G_2})$ et proposer une technique de variable de contrôle visant à réduire la méthode de Monte-Carlo. Écrire un programme qui calcule $\mathrm{Var}(X)$. La variance a-t-elle été réduite ?

5. On pose

$$Y_1 = e^{\lambda_1 G_1}, \ Y_2 = e^{\lambda_2 G_2} \ .$$

On cherche à identifier la meilleure variable de contrôle de la forme $\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2$. Calculer explicitement la matrice de covariance de (Y_1, Y_2).
En supposant que l'on connaît explicitement $\mathrm{Cov}(X, Y_1)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y_2)$, trouver un couple (μ_1^0, μ_2^0) permettant de minimiser $\mathrm{Var}(X - \mu_1 Y_1 - \mu_2 Y_2)$.
Écrire un programme qui :

- calcule $\mathrm{Cov}(X, Y_1)$, $\mathrm{Cov}(X, Y_2)$, μ_1^0, μ_2^0
- calcule $\mathrm{Var}(X - \mu_1^0 Y_1 - \mu_2^0 Y_2)$.

Comparer cette variance à $\mathrm{Var}(X)$ obtenue en question 2.

6. Montrer que si $\mu \in \mathbb{R}$ et f fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{E}(e^{-\mu g_1 - \frac{\mu^2}{2}} f(g_1 + \mu, g_2)) = \mathbb{E}(f(g_1, g_2) \ .$$

En déduire μ_1, μ_2 fonctions de μ telles que $\forall f$:

$$\mathbb{E}(e^{-\mu G_1 - \frac{\mu^2}{2}} f(G_1 + \mu_1, G_2 + \mu_2)) = \mathbb{E}(f(G_1, G_2)) \ .$$

7. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose

$$X_\mu = e^{-\mu G_1 - \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1 + \mu_1, G_2 + \mu_2) \text{ avec } \phi(x, y) = (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 y} - K)_+ \ .$$

Montrer que $\mathbb{E}(X_\mu) = \mathbb{E}(X)$. Proposer une nouvelle méthode de calcul de I. Montrer que :

$$\mathrm{Var}(X_\mu) = \mathbb{E}(e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

en déduire que :

$$\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} = \mathbb{E}((-G_1 + \mu) e^{-\mu G_1 + \frac{\mu^2}{2}} \phi(G_1, G_2)^2) \ .$$

8. *On suppose désormais que $C_2 = 0$ (les autres constantes restent inchangées).* Montrer que si $\mu \leq d_1 = \frac{1}{\lambda_1} \log(K/C_1)$, $\frac{d\mathrm{Var}(X_\mu)}{d\mu} \leq 0$. Utiliser ce résultat pour choisir un μ tel que $\mathrm{Var}(X_\mu) \leq \mathrm{Var}(X)$. Écrire un programme qui calcule ces deux variances. Combien d'itérations faut-il effectuer dans la méthode de Monte-Carlo avec X_μ pour avoir un résultat I_n^μ qui approche I à 0.1 près avec 95% de chances ? Écrire une suite au programme qui calcule I (avec X_μ) à 0.1 près avec 95% de chances.