M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, `http://math1.unice.fr/~cgiraud/ens.html`
Sylvain Rubenthaler, `http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé des exercices de la p.16 du polycopié

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S|N=j) &= \sum_{i\geq 0} i\mathbb{P}(S=i|N=j)\\
&= \sum_{i\geq 0} i\mathbb{P}(\text{on obtient une somme } i-j \text{ en } j^2 \text{ lancers de dé})\\
&= \sum_{i\geq 0} (i-j)\mathbb{P}(\text{on obtient une somme } i-j \text{ en } j^2 \text{ lancers de dé})\\
&\qquad + \sum_{i\geq 0} j\mathbb{P}(\text{on obtient une somme } i-j \text{ en } j^2 \text{ lancers de dé})\\
&= \mathbb{E}(\text{somme de } j^2 \text{ lancers de dé}) + j\times 1\\
&= \frac{j^2}{6}(1+2+\cdots+6)+j = \frac{7j^2}{2}+j\ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(S|N) = \frac{7j^2}{2}+1$.

2. $\mathbb{E}(X|Y)=\phi(Y)$ où

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \int_{\mathbb{R}} y\mathbb{P}(Y\in dy|X=x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} y\mathbf{1}_{0\leq x\leq y\leq 1}\frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{\int_{\mathbb{R}} f(x,u)du}dy\ .
\end{aligned}$$

Calculons pour $0\leq x\leq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x,u)du &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0\leq x\leq u\leq 1} n(n-1)(u-x)^{n-2}du\\
&= \int_x^1 n(n-1)(u-x)^{n-2}du\\
&= \left[n(u-x)^{n-1}\right]_x^1\\
&= n(1-x)^{n-1}\ .
\end{aligned}$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\phi(y) &= \int_{\mathbb{R}} yn(n-1)(y-x)^{n-1}\mathbf{1}_{0\le x\le y\le 1}\frac{1}{n(1-x)^{n-1}}dy\\
&= \frac{(n-1)\mathbf{1}_{0\le x\le 1}}{(1-x)^{n-1}}\int_x^1 y(y-x)^{n-2}dy\\
&= \frac{(n-1)\mathbf{1}_{0\le x\le 1}}{(1-x)^{n-1}}\left(\left[-\frac{y(y-x)^{n-1}}{n-1}\right]_x^1+\int_x^1\frac{(y-x)^{n-1}}{n-1}dy\right)\\
&= \frac{(n-1)\mathbf{1}_{0\le x\le 1}}{(1-x)^{n-1}}\left(\frac{(1-x)^{n-1}}{n-1}+\left[-\frac{(y-x)^n}{n(n-1)}\right]_x^1\right)\\
&= \mathbf{1}_{0\le x\le 1}\frac{n-1+x}{n}\ .
\end{aligned}
$$

Donc $\mathbb{E}(Y|X)=\mathbf{1}_{0\le X\le 1}\frac{n-1+X}{n}=\frac{n-1+X}{n}$ car X est toujours dans $[0,1]$.

3. (a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_1+\dots+X_n+X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\
\text{(linéarité de l'espérance conditionelle)} &= \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_n)+\dots+\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\
\text{(comme } X_1,\dots X_n \text{ sont } \mathcal{F}_n\text{-mesurables)} &= X_1+\dots+X_n+\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\
\text{(comme } X_{n+1} \text{ indépendant de } X_1,\dots,X_n) &= X_1+\dots+X_n+\mathbb{E}(X_{n+1})\ .
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(z^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(z^{X_1}\dots z^{X_n}z^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n)\\
\text{(comme } z^{X_1}\dots z^{X_n} \text{ sont } \mathcal{F}_n\text{-mesurables)} &= z^{X_1}\dots z^{X_n}\mathbb{E}(z^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n)\\
\text{(comme } X_{n+1} \text{ indépendant de } X_1,\dots,X_n) &= z^{X_1}\dots z^{X_n}\mathbb{E}(z^{X_{n+1}})\\
&= z^{S_n}\mathbb{E}(z^{X_{n+1}})\ .
\end{aligned}
$$

Si $X_1,\dots,X_n$ ont la même loi :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(z^{S_n}) &= \mathbb{E}(z^{X_1}\dots z^{X_n})\\
\text{(indépendance des } X_i) &= \mathbb{E}(z^{X_1})\dots\mathbb{E}(z^{X_n})=(G(z))^n
\end{aligned}
$$

4. (a) Par l'inégalité de Jensen : $\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)^p\le\mathbb{E}(|X|^p|\mathcal{F}_n)$.

   (b) On suppose que X et Z prennent un nombre fini de valeurs, $X\in\{x_1,\dots,x_n\}$, $Z\in\{z_1,\dots,z_m\}$. Soit ϕ fonction convexe.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X)|Z) &= \sum_{1\le j\le m}\mathbf{1}_{Z=z_j}\mathbb{E}(\phi(X)|Z=z_j)\\
&= \sum_{1\le j\le m}\mathbf{1}_{Z=z_j}\sum_{1\le i\le n}\phi(x_i)\mathbb{P}(X=x_i|Z=z_j)\ .
\end{aligned}
$$

Par convexité de ϕ, on a pour tout j : $\sum_{1\le i\le n}\phi(x_i)\mathbb{P}(X=x_i|Z=z_j)\ge\phi\left(\sum_{1\le i\le n}x_i\mathbb{P}(X=x_i|Z=z_j)\right)$
Donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X)|Z) &\ge \sum_{1\le j\le m}\mathbf{1}_{Z=z_j}\phi\left(\sum_{1\le i\le n}x_i\mathbb{P}(X=x_i|Z=z_j)\right)\\
&= \sum_{1\le j\le m}\mathbf{1}_{Z=z_j}\phi(\mathbb{E}(X|Z=z_j))\\
&= \phi(\mathbb{E}(X|Z))\ .
\end{aligned}
$$