M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, `http://math1.unice.fr/~cgiraud/ens.html`
Sylvain Rubenthaler, `http://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html`

# Corrigé de l'exercice de la p.21 du polycopié et du TD no. 2

Points 2,3 de la proposition 2.2 p. 21

(2) Soit $Y_T(\omega) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)(\omega)\mathbf{1}_{T(\omega)=n}$. On veut montrer que $Y_T = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_T)$. Soit $A = Y_T^{-1}(U)$ où $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\forall n$ on a

$$A \cap \{T = n\} = \{Y_T \in U\} \cap \{T = n\} = \{Y_n \in U\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n \ .$$

Donc $A \in \mathcal{F}_T$, donc $Y_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.
Soit $A \in \mathcal{F}_T$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_T\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{T=n}\mathbf{1}_A) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{\{T=n\}\cap A} \\
(\text{car } \{T=n\}\cap A \in \mathcal{F}_n) \quad &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{\{T=n\}\cap A}|\mathcal{F}_n)) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{T=n})) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{T=n}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_T)) \\
&= \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A)
\end{aligned}$$

Cela suffit à montrer que $Y_T = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_T)$.

(3) Soit $A \in \mathcal{F}_S$, soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A \cap \{T = n\} = \bigcup_{1\leq k\leq n} (A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\})$$

Pour tout $k$, $A\cap\{S = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ et $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ donc $A\cap\{S = k\}\cap\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.
Donc $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.
Cela est vrai $\forall n$, donc $A \in \mathcal{F}_T$.
Donc $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

TD no.2

A. On note $X_n^k$ la richesse au temps $n$ quand on est parti en $X_0^k = k$.

1.

$$\begin{aligned}
p_k &= \mathbb{P}(X_T^k = 0) \\
&= \mathbb{P}(X_T^k = 0|X_1^k = k+1)\mathbb{P}(X_1^k = k+1) + \mathbb{P}(X_T^k = 0|X_1^k = k-1)\mathbb{P}(X_1^k = k-1) \\
&= p_{k+1}p + p_{k-1}q \ .
\end{aligned}$$

2. • Si $p \neq 1/2$. Les suites de la forme $p_k = A + B(q/p)^k$ vérifient la formule de récurrence ci-dessus. Si on trouve $A, B$ vérifiant le système : $A + B = p_0, A + B(q/p) = p_N$ alors la suite $A + B(q/p)^k = p_k$, $\forall k$. On trouve :

$$A = \frac{(q/p)^N}{(q/p)^N - 1},\ B = \frac{1}{1-(q/p)^N} .$$

• Si $p = 1/2$. La solution est de la forme $p_k = A + Bk$. On a le système : $A = p_0, A + NB = p_N$. On trouve :

$$A = 1,\ B = -1/N .$$

B. 1. On a : $\mathbb{E}_k(T) = \mathbb{E}_k(T\mathbf{1}_{X_1=k+1} + T\mathbf{1}_{X_1=k-1}$. Calculons

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}_k(T\mathbf{1}_{X_1=k+1}) & = & \mathbb{E}_k(\mathbb{E}_k(T\mathbf{1}_{X_1=k+1}|\sigma(X_1))) \\ \text{(comme } X_1 \text{ est } \sigma(X_1)\text{-mesurable)} & = & \mathbb{E}_k(\mathbf{1}_{X_1=k+1}\mathbb{E}_k(T|\sigma(X_1))) \\ & = & \mathbb{E}_k(\mathbf{1}_{X_1=k+1}\mathbb{E}_k(T|X_1=k+1)) \\ & = & \mathbb{E}_k(\mathbf{1}_{X_1=k+1})\mathbb{E}_k(T|X_1=k+1) \\ & = & \mathbb{P}(X_1=k+1)\mathbb{E}_k(T|X_1=k+1) . \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}_k(T) & = & \mathbb{P}(X_1=k+1)\mathbb{E}_k(T|X_1=k+1) + \mathbb{P}(X_1=k-1)\mathbb{E}_k(T|X_1=k-1) \\ & = & p(1+\mathbb{E}_{k+1}(T)) + q(1+\mathbb{E}_{k-1}(T)) \\ & = & pE_{k+1}(T) + q\mathbb{E}_{k-1}(T) + 1 . \end{array}$$

2. On suppose $p \neq 1/2$. Si on cherche une solution de la forme proposée par l'énoncé, comme on a : $\mathbb{E}_0(T) = 0$, $\mathbb{E}_N(T) = 0$, cela donne le système :

$$A + B = 0,\ \frac{N}{p-q} + A + B(q/p)^N = 0 .$$

On trouve :

$$A = \frac{-\frac{N}{q-p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, B = -A .$$

C. 1. $\mathbb{P}(T = i) = (1-p)^{i-1}p$. Donc $T \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique).

2.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(T_2 = i+j|T_1 = i) & = & \dfrac{\mathbb{P}(T_2 = i+j, T_1 = i)}{\mathbb{P}(T_1 = i)} \\ & = & \dfrac{(1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-1}p}{(1-p)^{i-1}p} \\ & = & (1-p)^{j-1}p = \mathbb{P}(T_1 = j) . \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T_2|T_1 = i) & = & \displaystyle\sum_{j\geq 1}(i+j)\mathbb{P}(T_2 = i+j|T_1 = i) \\ & = & \displaystyle\sum_{j\geq 1}(i+j)(1-p)^{j-1}p \\ & = & i + p\displaystyle\sum_{j\geq 1} j(1-p)^{j-1} \\ & = & i + p\dfrac{1}{(1-(1-p))^2} = i + \dfrac{1}{p} . \end{array}$$

<u>Rappel.</u> On a utlisé la formule : $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{j\geq 1} jx^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ qui se retrouve en dérivant par rapport à $x$ les deux termes de l'égalité : $\forall x \in [0,1[$, $\sum_{j\geq 0} x^j = \frac{1}{1-x}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_2) &= \mathbb{E}(\sum_{i\geq 1} T_2 \mathbf{1}_{T_1=i}) \\
&= \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}(T_2 \mathbf{1}_{T_1=i}) \\
&= \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}(T_2|T_1=i)\mathbb{P}(T_1=i) \\
&= \sum_{i\geq 1} \left(i+\frac{1}{p}\right)(1-p)^{i-1}p \\
&= \sum_{i\geq 1} (1-p)^{i-1} + \sum_{i\geq 1} ip(1-p)^{i-1} \\
&= \frac{2}{p}\ .
\end{aligned}$$