M1 MASS 2004-2005
Université de Nice - Sophia Antipolis

Christophe Giraud, http://math1.unice.fr/∼cgiraud/ens.html
Sylvain Rubenthaler, http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé : généalogie de Galton-Watson, p. 25

Par convention $0^0 = 1$.

1.

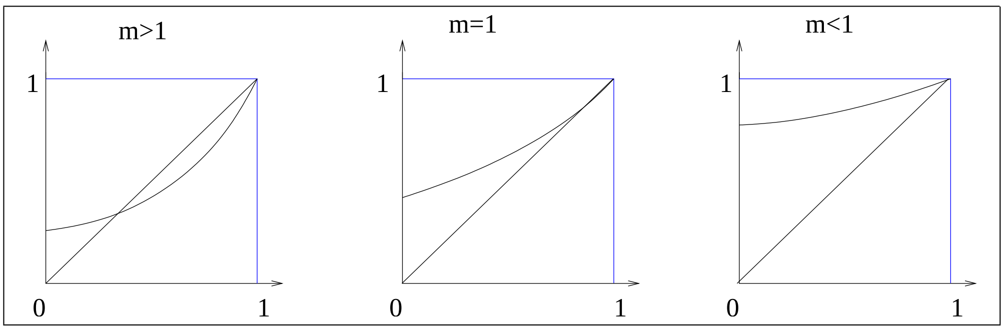
$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbb{E}(s^X) \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X=k)s^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \mu(k)s^k \end{aligned}$$

On a donc : $G(1) = \sum_{k\geq 0}\mu(k) = 1$, $G(0) = \sum_{k\geq 1}\mu(k)0^k = \mu(0)$.

2. Vu la question précédente, G est croissante. Soient $s, t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $u \mapsto u^k$ est convexe. Donc :

$$\begin{aligned} G(\lambda s + (1-\lambda)t) &= \mathbb{E}((\lambda s + (1-\lambda)t)^X) \\ &\leq \mathbb{E}(\lambda s^X + (1-\lambda)t^X) \\ &= \lambda G(s) + (1-\lambda)G(t) \ . \end{aligned}$$

Donc G est convexe. On a : $G'(s) = \sum_{k\geq 0}\mu(k)ks^{k-1}$. Donc : $G'(1) = \sum_{k\geq 1}k\mu(k) = \mathbb{E}(X)$. En utilisant les réponses précédentes, on peut dessiner G :



3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(s^{X_1^{(n)}+\dots X_{Z_n}^{(n)}}|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(s^X)^{Z_n} \ . \end{aligned}$$

On a donc :

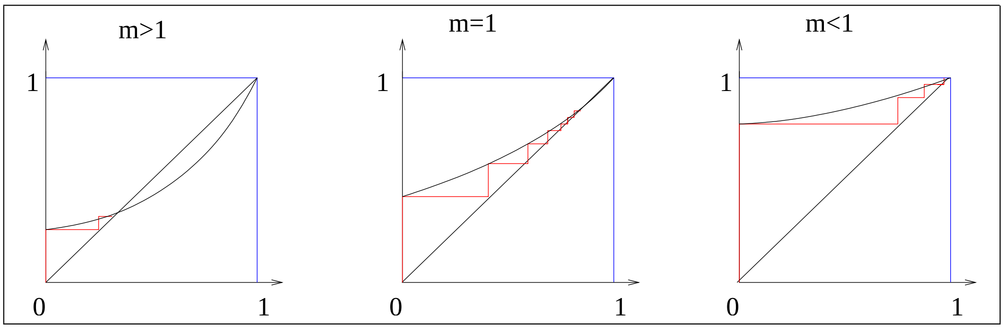
$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^{Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(s^X)^{Z_n}) \\ &= G_n(\mathbb{E}(s^X)) \\ &= G_n(G(s)) \ . \end{aligned}$$

On a $G_0(s) = \mathbb{E}(s^{Z_0}) = s$ donc on obtient par récurrence : $G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) = G_{n-2}(G(G(s))) = \cdots = G^{\circ n}(s)$ ("$\circ n$" signifie que l'on compose n fois).

4. $G_n(s) = \sum_{k\geq 0} s^k \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = 0) + \sum_{k\geq 1} s^k \mathbb{P}(Z_n = k)$. Donc $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. C'est la probabilité pour qu'il n'y ait plus personne à la n-ème génération.
Notons $A_n = \{\omega : Z_n(\omega) = 0\}$. On a pour tout n : $A_n \subset A_{n=1}$.

$$\begin{array}{rcl} p & = & \mathbb{P}(\cup_{n\geq 0} A_n) \\ \text{(réunion croissante)} & = & \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(0) \\ & = & \lim\limits_{n\to+\infty} G^{\circ n}(0) \ . \end{array}$$

En regardant la limite sur les graphes, on trouve que $p = 1$ si $m \leq 1$ et $p < 1$ si $m > 1$.



5.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) & = & \dfrac{1}{m^{n+1}} \mathbb{E}(X_1^{(n)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n)} | \mathcal{F}_n) \\ & = & \dfrac{1}{m^{n+1}} Z_n \mathbb{E}(X) \\ & = & M_n \ . \end{array}$$

Donc (M_n) est une martingale. $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = 1$.

6. On suppose $m \leq 1$. On sait que $p = 1$ donc $M_\infty(\omega) = 0$ pour p.t. ω. On a donc que $\mathbb{E}(M_\infty) \neq \mathbb{E}(M_n) = 1$. On a $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$ mais les théorèmes de convergence monotone ou dominée ne s'appliquent pas ici.

7.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) & = & \mathbb{E}(e^{-\lambda Z_n / m^n}) \\ & = & \mathbb{E}((e^{-\lambda/m^n})^{Z_n}) \\ & = & G_n(e^{-\lambda/m^n}) \ . \end{array}$$

8. Par convergence dominée : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda M_\infty}) =: L(\lambda)$ On a par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) & = & G_n(e^{-\lambda/m^n}) \\ & = & G(G_{n-1}(e^{-\lambda/m^n})) \\ & = & G(\mathbb{E}(e^{-\lambda M_{n-1}/m^n})) \\ & = & G(L(\lambda/m)) \ . \end{array}$$

On a donc : $L(\lambda) = G(L(\lambda/m))$.